HABILITATION
À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée par

Rosane Ushirobira

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Théorie algébrique de Lie

Autour des algèbres et super-algèbres de Lie et de l'algèbre de Weyl

Décembre 2010

Rapporteurs :

Jacques Alev	Professeur, Université de Reims
Consuelo Martínez López	Professeur, Universidad de Oviedo, Espagne
Marc Rosso	Professeur, Université Paris 7
Andrea Solotar	Professeur, Universidad de Buenos Aires, Argentine

Habilitation à Diriger des Recherches préparée au sein de
l'Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université de Bourgogne, Dijon

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Autour des algèbres de Lie **5**

2.1 Champs de vecteurs adjoints 5

2.2 Éléments extrêmaux 7

2.3 Algèbres de Lie graduées 9

2.4 Un nouvel invariant des algèbres de Lie quadratiques 13

3 Autour des super-algèbres de Lie **17**

3.1 Un super-théorème d'Amitsur-Levitzki 17

3.2 Une super-trace sur l'algèbre de Weyl 20

3.3 Quelques propriétés des algèbres de Clifford-Weyl 26

4 Conclusions et perspectives **33**

4.1 Dans la suite de mes travaux précédents 33

4.2 Vers de nouvelles perspectives 34

5 Annexes **37**

5.1 Glossaire sur l'algèbre de Weyl et l'algèbre de Clifford 37

5.2 Glossaire sur le complexe de Koszul 39

5.3 Formule de déformation universelle 40

6 Activités d'encadrement 43

Bibliographie 45

Chapitre

1 Introduction

Mon domaine de recherche peut être décrit en quelques mots comme la théorie algébrique de Lie, et plus particulièrement les algèbres et super-algèbres de Lie et leurs représentations. Ce manuscrit décrit les activités de recherche que j'ai menées dans ce domaine depuis ma thèse. Après une brève évocation de celle-ci, ce premier chapitre présente les différents problèmes étudiés, les raisons qui m'ont amenées à m'y intéresser et la manière de les résoudre.

Après des études prédoctorales en Mathématiques à l'Université de Campinas (Brésil) puis à l'Université de Rutgers (États Unis), j'ai effectué ma thèse sous la direction d'Olivier Mathieu à l'Université Paris 7 (octobre 1993 - septembre 1994) puis à l'Université de Strasbourg (septembre 1994 - juin 1996). Le point de départ de mon travail de thèse est la méthode des orbites dans sa version algébrique proposée par Jacques Dixmier et adaptée aux représentations irréductibles des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie de dimension finie [Dix74]. Dans ma thèse [**Ush96**][1], j'élabore une méthode comparable à celle de Dixmier pour certaines algèbres de Lie simples de dimension infinie sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro : les algèbres de Lie des champs de vecteurs sur une courbe affine irréductible lisse. La méthode proposée consiste globalement à associer une représentation induite irréductible à chaque point d'une orbite coadjointe de dimension finie. J'énonce dans ma thèse deux conjectures invitant à une étude plus approfondie de cette méthode.

ATER à l'Université de Poitiers en 1996-1997, j'ai eu la chance de pouvoir travailler avec Thierry Levasseur sur les paires symétriques, un sujet assez différent de mon sujet de thèse mais toujours dans la théorie des algèbres de Lie [**LU99**]. Nous nous sommes intéressés à l'ensemble $\mathcal{E}$ des champs de vecteurs qui annulent les polynômes invariants sur l'espace tangent des espaces symétriques semi-simples complexes. Plus précisément, nous nous sommes demandés dans quelles conditions ces champs de vecteurs peuvent être décrits complètement à l'aide des champs de vecteurs adjoints. A l'origine de ce travail se trouve un article de Jacques Dixmier dans lequel il donne une réponse à cette question dans le cas diagonal [Dix79] : les champs de vecteurs adjoints caractérisent

[1]Les publications référencées en caractères gras sont celles dont je suis coauteur.

complètement $\mathcal{E}$. Nous avons démontré avec Thierry Levasseur que dans le cas général des espaces symétriques semi-simples complexes de rang supérieur à 2, cela est aussi vrai. La preuve se fait à l'aide de propriétés des représentations polaires et en étudiant cas par cas des systèmes de racines réduits.

Mes deux années postdoctorales aux Pays Bas à l'Université Technique d'Eindhoven (septembre 1997 - septembre 1999) ont été très enrichissantes. Le groupe d'Arjeh M. Cohen étant plutôt tourné vers les mathématiques discrètes, cette expérience a été l'occasion de considérer la théorie des algèbres de Lie d'un point de vue computationnel. Je me suis intéressée avec plaisir au Calcul Formel et j'en conserve un intérêt certain pour des outils tels que Maple ou Gap. Le groupe recevant régulièrement des visiteurs étrangers, ce séjour m'a donné aussi l'occasion de collaborer avec Anya Steinbach (Justus Liebig University Giessen), David Wales (CalTech) et Arjeh M. Cohen sur un sujet très intéressant : les éléments extrêmaux dans les algèbres de Lie. Ceux-ci sont définis facilement comme étant les éléments X dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps $\mathbb{K}$ qui satisfont $[X, [X, \mathfrak{g}]] \subset \mathbb{K}X$. A titre d'exemple, on peut penser aux éléments *sandwichs* étudiés notamment par Efim Zelmanov et Aleksei Ivanovich Kostrikin [ZK91], i.e. les éléments X tels que $\mathrm{ad}(X)^2 = 0$. Nous avons étudié plusieurs questions naturelles sur les propriétés des éléments extrêmaux. Nous avons ainsi montré que les algèbres de Lie engendrées par des éléments extrêmaux sont de dimension finie. Ce résultat et d'autres propriétés intéressantes sur les éléments extrêmaux ont fait l'objet d'un article publié en 2001 [**CSUW01**].

J'ai été recrutée comme Maître de Conférences à l'Université de Bourgogne en septembre 1999. Ces onze dernières années passées à Dijon m'ont beaucoup apporté sur bien des plans, recherche, enseignement et tant d'autres. L'équipe de Mathématique Physique (Laboratoire Gevrey jusqu'en 2002) de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne est un endroit mondialement connu dans le domaine de la quantification par déformation. Son séminaire hebdomadaire a été l'occasion d'écouter nombre d'exposés intéressants. Au-delà de ce contexte favorable, la principale source d'enrichissement mathématique a été pour moi la possibilité de travailler avec Georges Pinczon. C'est grâce à lui et avec lui que je me suis intéressée aux super-algèbres de Lie, à leurs représentations et à la quantification par déformation.

De 2002 à 2004, j'ai coencadré avec Georges Pinczon la thèse de Pierre-Alexandre Gié [Gié04] que nous avions eu comme étudiant dans le cadre du cours d'Algèbre de Maîtrise. Celui-ci a commencé par étudier les structures de Nambu-Lie, s'intéressant notamment aux $(n-1)$-structures sur $\mathbb{R}^n$. Outre la classification de ces structures, on trouve dans sa thèse une construction de crochets de tout ordre sur une algèbre de Lie de dimension finie et la quantification d'une $(2n+1)$-structure sur $\mathbb{C}^{2n+2}$ à l'aide des polynômes standards sur l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(2n)$. Les polynômes standards nous ont mené à la recherche d'un théorème de type Amitsur-Levitzki [AL50] pour les super-algèbres de Lie. En adaptant les polynômes standards à une super-version, on obtient une définition de super-polynôme standard. Un exemple simple nous montre que ce dernier n'est pas une identité polynomiale sur la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$. Les élégantes démonstrations de Bertram Kostant dans le cas classique [Kos58, Kos81] nous ont inspiré dans la preuve du résultat publié dans un article qui dit que le super-polynôme standard est une identité polynomiale sur la super-algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1, 2n)$, celle qui "ressemble" le plus à une algèbre de Lie semi-simple [**GPU03**, **GPU06**].

Georges Pinczon parlait beaucoup de l'algèbre de Weyl. Je pense qu'avec $\mathfrak{osp}(1, 2n)$, ce sont les structures algébriques dont nous avons le plus parlé ensemble toutes ces années (avec l'*algèbre extérieure*...). En 2005, nous avons publié un article que j'aime beaucoup sur l'algèbre de Weyl [**PU05**], notée ici par W. Dans cet article, en utilisant le $\star$-produit de Moyal, nous définissons une super-trace sur W. En considérant la forme bilinéaire associée à cette super-trace, nous concluons que W est une super-algèbre de Lie super-quadratique. Nous avons également étudié les représentations adjointe et adjointe tordue de W comme algèbre de Lie et comme super-algèbre de Lie. Comme application des propriétés obtenues, nous donnons une renormalisation de la super-trace.

Georges Pinczon et moi avons également travaillé sur les algèbres de Lie graduées et leur utilisation dans la théorie des déformations. Parmi les résultats décrits dans l'article [**PU07**], on trouve quelques propriétés intéressantes des algèbres de Lie quadratiques : par exemple, si l'on a une 3-forme invariante non nulle I sur un espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{g}$ telle que son super-crochet $\{I, I\}$ est nul, alors $\mathfrak{g}$ a une structure d'algèbre de Lie quadratique (et réciproquement). Nous avons classifié toutes les algèbres de Lie quadratiques dont la 3-forme associée est indécomposable. Nous avons également démontré des résultats sur la cohomologie cyclique des algèbres de Lie quadratiques, en particulier dans le cas semi-simple.

L'Institut de Mathématiques de Bourgogne accueille chaque année des nombreux visiteurs. Nous avons eu le plaisir de recevoir en juin 2007 la visite d'Ian M. Musson, l'un des spécialistes mondiaux de la théorie des super-algèbres de Lie. A l'occasion de cette visite, nous avons initié un travail sur les algèbres de Clifford-Weyl [**MPU09**]. Une algèbre de Clifford-Weyl $\mathcal{C}(n, 2k)$ est un mélange de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(n)$ et de l'algèbre de Weyl W_{2k} : $\mathcal{C}(n, 2k) = \mathcal{C}(n) \otimes \mathsf{W}_{2k}$. Notre but était d'étudier principalement les déformations de ces algèbres. Nous avons montré que le comportement périodique de l'algèbre de Clifford se retrouve dans l'algèbre de Clifford-Weyl. Cela nous a permis de démontrer que les seules algèbres de Clifford-Weyl qui peuvent être déformées sont celles qui proviennent de l'algèbre de Clifford impaire et de la "petite" algèbre de Weyl W_2. Nous avons trouvé les déformations polynomiales de ces algèbres, et avons également décrit leurs représentations.

Le travail initié avec Georges Pinczon sur les algèbres de Lie quadratiques se poursuit depuis un peu plus d'un an avec un nouveau doctorant, Minh Thanh Duong. Sa thèse devrait être soutenue en 2011, un *preprint* regroupant une partie des résultats déjà obtenus [**DPU10**]. Dans la continuité des travaux publiés en 2007, nous nous sommes intéressés à un certain nombre associé à une algèbre de Lie quadratique $\mathfrak{g}$ et qui mesure la décomposabilité de la 3-forme I associée à $\mathfrak{g}$. Ce nombre peut-être 0, 1 ou 3. Dans le *preprint*, nous donnons la classification complète des algèbres de Lie quadratiques pour lesquelles ce nombre est non nul. Nous démontrons également qu'il s'agit d'un invariant.

La suite de ce document présente de manière plus détaillée les travaux brièvement décrits ci-dessus. Le chapitre 2 porte sur les algèbres de Lie, le chapitre 3 sur les superalgèbres de Lie. Les conclusions et quelques perspectives se trouvent dans le chapitre 4. Un annexe contenant des définitions et propriétés sur les structures traitées dans ce manuscrit se trouve au chapitre 5. Le chapitre 6 contient un bref résumé de mes activités d'encadrement.

CHAPITRE

2 Autour des algèbres de Lie

Mon intérêt pour les algèbres de Lie m'a conduit à les étudier sous différents aspects. J'ai ainsi regardé de plus près l'algèbre des champs de vecteurs adjoints associée aux espaces symétriques. Je me suis également intéressée à des propriétés structurelles de quelques algèbres de Lie particulières engendrées par des éléments dits extrêmaux. J'ai travaillé sur les algèbres de Lie graduées associées à la théorie des déformations. Plus récemment enfin, j'ai étudié les algèbres de Lie quadratiques.

2.1 Champs de vecteurs adjoints

*Dans ce travail réalisé avec Thierry Levasseur juste après ma thèse de doctorat, nous avons étudié les champs de vecteurs qui annulent les polynômes invariants sur l'espace tangent des espaces symétriques semi-simples complexes. Nous avons démontré que lorsqu'un espace symétrique G/K est de rang supérieur à 2, alors les fonctions polynomiales K-invariantes caractérisent complètement le sous-groupe K [**LU99**].*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple et soit ϑ un automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que $\vartheta^2 = 1$. On pose $\mathfrak{k} = \ker(\vartheta - \mathrm{Id})$ et $\mathfrak{p} = \ker(\vartheta + \mathrm{Id})$ et on peut donc écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. De plus,

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}.$$

En particulier, $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. La paire $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ ou $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est appelée une *paire symétrique*.

On dénote par $\mathcal{O}(\mathfrak{p}) = \mathrm{S}(\mathfrak{p}^*)$ l'anneau des fonctions régulières sur $\mathfrak{p}$ où $\mathrm{S}(\mathfrak{p}^*)$ désigne l'algèbre symétrique de $\mathfrak{p}^*$. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs (algébriques) sur $\mathfrak{p}$ peut être identifiée à l'ensemble des dérivations de $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$, noté $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$.

Dans la suite du manuscrit, on désignera par $\mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel V. Il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\tau : \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathfrak{p}))$

défini par :

$$\tau(X)(f)(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathrm{e}^{-tX}(v)),\ \forall\, v \in \mathfrak{p}, f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p}), X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}).$$

Pour simplifier les notations, comme $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$, on notera $\tau(X) = \tau(\mathrm{ad}(X))$, pour tout $X \in \mathfrak{k}$. Nous pouvons supposer que $\mathfrak{k}$ ne contient pas d'idéaux non triviaux de $\mathfrak{g}$. On peut donc décomposer $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ en un produit de paires symétriques irréductibles.

Un *sous-espace de Cartan* de $\mathfrak{p}$ est un sous-espace abélien composé d'éléments semi-simples de $\mathfrak{p}$ et maximal pour ces deux propriétés. Tous les sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{p}$ ont la même dimension, appelée le *rang* de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Soit p le rang de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Il a été démontré dans un article de Bertram Kostant et Stephen Rallis que l'anneau des invariants sous l'action de K,

$$\mathcal{O}(\mathfrak{p})^K = \{f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p}) \mid \tau(\mathfrak{k})(f) = 0\} = \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_p]$$

est un anneau de polynômes [KR71].

On définit une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$ par

$$\widetilde{\mathfrak{k}} = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}) \mid \tau(X)(f) = 0, \forall f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})^K\}$$

Il est clair que

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{k}) \subset \widetilde{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}).$$

Prenons le cas des paires symétriques $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ de rang 1, par exemple. Soit B la forme de Killing définie sur $\mathfrak{g}$, c'est à dire, la forme bilinéaire associée à la représentation adjointe par la trace. On a $\mathcal{O}(\mathfrak{p})^K = \mathbb{C}[u_1]$ et u_1 est la forme de Killing B, à un scalaire près. De plus, on a

$$\widetilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{so}(\mathfrak{p}, u_1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ad}(\mathfrak{k}) \subsetneq \widetilde{\mathfrak{k}},$$

sauf dans le cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \simeq (\mathfrak{so}(q+1, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(q, \mathbb{C}))$.

Avec Thierry Levasseur, nous nous sommes intéressés à la description du $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$-module des champs de vecteurs sur $\mathfrak{p}$ qui annulent $\mathcal{O}(\mathfrak{p})^K$. On pose

$$\mathcal{E} = \{d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathfrak{p})) \mid d(f) = 0,\ \forall\ f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})^K\}$$

Alors

$$\mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) \subset \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\widetilde{\mathfrak{k}}) \subset \mathcal{E}.$$

Nous conjecturons que

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}).$$

Dans le cas diagonal $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $\vartheta(x, y) = (y, x)$, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, Jacques Dixmier a démontré que $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k})$ [Dix79]. De même, lorsque le rang de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ est égal au rang de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (on dit que $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ est de *rang maximal*), en utilisant des résultats de Gerry Schwarz [Sch95], on peut conclure également que $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k})$.

Dans l'article publié avec Thierry Levasseur, nous démontrons le théorème suivant [**LU99**] :

Théorème 2.1.1.

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ *une paire symétrique. Alors,* $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}) = \widetilde{\mathfrak{k}}$ *si, et seulement, si chaque facteur irréductible de rang un de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ *est isomorphe à* $(\mathfrak{so}(q+1, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(q, \mathbb{C}))$.

Notre théorème permet de déterminer sous quelles conditions, on a $\mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) \subsetneq \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\widetilde{\mathfrak{k}})$. Pour démontrer ce résultat, nous considérons le sous-groupe algébrique connexe $\widetilde{K}$ de $\mathrm{GL}(\mathfrak{p})$ tel que $\mathrm{Lie}(\widetilde{K}) = \widetilde{\mathfrak{k}}$ et nous démontrons que la représentation $(\widetilde{K}, \mathfrak{p})$ est polaire. Un résultat de Jiri Dadok [Dad85] nous permet de supposer qu'il existe une paire symétrique $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{k}})$ qui se décompose en $\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{p}$. Notons $\mathfrak{a}$ le sous-espace de Cartan de $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{k}})$. Une étude au cas par cas des systèmes de racines réduits $\Sigma(\widetilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{a})$ et $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ permet d'achever la preuve.

En utilisant le théorème 2.1.1 (p. 7), Dmitri Panyushev conjecture dans [Pan04] que la variété commutante associée à une paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est irréductible si, et seulement si, le rang de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est plus grand ou égal à 2. Panysushev remarque que son théorème 4.1 dans [Pan04] et notre classification dans [**LU99**] montrent la condition nécessaire de sa conjecture. La condition suffisante n'est pas vraie, comme le montre son article avec Okzana Yakimova [PY07] car la variété commutante est réductible dans le cas des paires symétriques $(\mathfrak{gl}(n+m, \mathbb{C}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}))$ pour $n \neq m$, $(\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ pour n impair et $(E_6, \mathfrak{so}(10, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C})$.

2.2 Éléments extrêmaux

*Lors de mon séjour postdoctoral à l'Université Technique d'Eindhoven, j'ai travaillé avec Arjeh M. Cohen, Anya Steinbach et David Wales sur les algèbres de Lie engendrées par des éléments extrêmaux sur un corps de caractéristique différente de 2. Parmi les résultats présentés dans l'article [**CSUW01**], on trouve la preuve qu'une algèbre de Lie engendrée par un nombre fini d'éléments extrêmaux est de dimension finie, ainsi que le nombre minimal de générateurs extrêmaux pour les algèbres de Lie classiques.*

Nous considérons ici $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Un élément X dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est dit *extrémal* si

$$[X, [X, \mathfrak{g}]] \subset \mathbb{K}X.$$

On désigne par $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments extrêmaux de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans le cas des algèbres de Lie de type Chevalley, les éléments correspondant aux racines longues sont extrêmaux. C'est ce qui a motivé notre étude des algèbres de Lie engendrées par des éléments extrêmaux. A l'origine, ces éléments ont été utilisés par Vladimir Chernousov dans la preuve du principe de Hasse pour E_8 [Che89].

Soit $X \in \mathfrak{g}$. On dit que X est un *élément sandwich* si

$$[X, [X, \mathfrak{g}]] = 0.$$

Il s'agit d'un type particulier d'élément extrémal. Les éléments sandwichs sont notamment utilisés dans la classification des algèbres de Lie modulaires sur des corps de caractéristique 5 et 7 [PS97].

Dans [**CSUW01**], nous démontrons qu'une algèbre de Lie engendrée par un nombre fini d'éléments extrêmaux est de dimension finie. De plus, d'après un résultat d'Efim Zelmanov et Aleksei Ivanovich Kostrikin [ZK91], il existe une algèbre de Lie universelle $\mathcal{L}_r$ engendré par un nombre fini d'éléments sandwichs qui est de dimension finie et nilpotente. Nous avons calculé sa dimension pour les petits cas :

r	1	2	3	4	5
$\dim(\mathcal{L}_r)$	1	3	8	28	537

La dimension dans les cas où r est supérieur à 6 n'est pas connue, les calculs sur machine demandant beaucoup de temps. Toutefois, on soupçonne la dimension de $\mathcal{L}_6$ d'être supérieure à 20000 [Roo05].

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ engendrée par des éléments extrêmaux, elle l'est aussi comme espace vectoriel. Il est donc possible de définir une forme bilinéaire f sur $\mathfrak{g}$ à partir de la définition d'un élément extrémal, $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, $[X, [X, Y]] = f(X, Y)X$, pour tous $X \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ et $Y \in \mathfrak{g}$. Nous avons démontré que cette forme bilinéaire f est symétrique, i.e. que f satisfait $f(X, Y) = f(Y, X)$ pour tous X, $Y \in \mathfrak{g}$. Nous avons également montré que f est invariante, c'est à dire que f satisfait $f([X, Y], Z) = f(X, [Y, Z])$ pour tous X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$. Le lien entre f et la forme de Killing κ de $\mathfrak{g}$ s'est traduit par l'inclusion des noyaux :

$$\ker(f) \subset \ker(\kappa).$$

De plus, l'on a l'égalité si la caractéristique du corps de base est nulle.

Un autre point intéressant abordé dans ce travail est le calcul du nombre minimal de générateurs extrêmaux pour les algèbres de Lie de type Chevalley. On démontre le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit $\mathfrak{g}$ un algèbre de Lie de type Chevalley sur un corps de caractéristique différente de 2. Alors, le nombre minimal de générateurs extrêmaux de $\mathfrak{g}$, noté $t(\mathfrak{g})$ est donné par le tableau :*

Type de $\mathfrak{g}$	$t(\mathfrak{g})$	*lorsque*
A_n	$n+1$	$n \geq 1$
B_n	$n+1$	$n \geq 3$
C_n	$2n$	$n \geq 2$
D_n	n	$n \geq 4$
E_n	5	$n = 6, 7, 8$
F_4	4	
G_2	2	

Parmi les travaux qui citent notre article, il se trouve celui de Karin Baur et Jan Draisma [BD04] qui étudie les variétés de sécantes de l'orbite adjointe minimale des algèbres de Lie classiques. Dans ce travail, les auteurs dénotent par C, l'image réciproque dans $\mathfrak{g}$ de son unique orbite minimale dans $\mathbb{P}\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple sur un corps algébriquement clos. Cet ensemble C coïncide avec l'ensemble d'éléments extrêmaux de $\mathfrak{g}$. La $(k-1)$-ème variété de sécantes est donnée par $\mathbb{P}(\overline{kC}) = \overline{\mathbb{P}(kC)}$. Ils remarquent la similitude entre la valeur minimale $k \in \mathbb{N}$ telle que $kC = \mathfrak{g}$ et le nombre $t(\mathfrak{g})$ dans les cas A_n et C_n et évoquent la possibilité d'utiliser nos résultats pour démontrer que cette similitude est encore valable dans les cas orthogonaux ainsi que pour déterminer les variétés de sécantes dans les cas exceptionnels.

Dans [CI06], Arjeh M. Cohen et Gábor Ivanyos définissent une façon naturelle d'associer une nouvelle géométrie appelée "*root filtration space*" à une algèbre de Lie engendrée par des éléments extrêmaux non-sandwichs. La construction de cette géométrie est basée sur nos résultats dans [**CSUW01**].

Toujours à l'Université Technique d'Eindhoven, Jos in't Panhuis, Erik Postma et Dan Roozemond ont étudié dans [itpPR09] la présentation d'une algèbre de Lie de type Chevalley par des ensembles minimaux de générateurs extrêmaux sous un aspect plus géométrique où les relations sont décrites par des graphes sur ces ensembles.

Le groupe de recherche d'Arjeh M. Cohen continue d'être très actif dans l'étude des éléments extrêmaux des algèbres de Lie, notamment sur tout ce qui concerne les aspects géométriques et computationnels du sujet. Trois thèses de doctorat dans ce groupe ont été écrites sur des sujets limitrophes, ainsi que quelques mémoires de Master.

2.3 Algèbres de Lie graduées

Avec Georges Pinczon, nous avons étudié les relations entre différentes algèbres de Lie graduées associées à la théorie des déformations. Nous nous sommes intéressés aux conséquentes applications, par exemple aux algèbres de Lie et algèbres de Poisson généralisées, aux déformations d'algèbres quadratiques et à la cohomologie cyclique.

Les résultats que je décris brièvement dans cette section se trouvent dans l'article [**PU07**].

2.3.1 Polynômes standard

Les polynômes standards sur une algèbre associative apparaissent par exemple, dans la théorie des Identités Polynomiales et en cohomologie. Par définition,

Définition 2.3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le *polynôme standard* S_n sur une algèbre associative $\mathfrak{g}$ est défini par

$$S_n(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(n)}, \ \forall\, X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g},$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Soit $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Lie graduée des applications multilinéaires alternées sur $\mathfrak{g}$. On a $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g}) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^k$ avec $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ et $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^1 = \mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Dans la suite du manuscrit, on désignera par $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre d'endomorphismes d'un espace vectoriel V.

Une première conséquence de cette définition démontrée dans [**PU07**] est :

Lemme 2.3.1. $\mathcal{I} := \mathrm{Vect}\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est une sous-algèbre de* $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$.

On considère la graduation $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})[1]$ de $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$ avec $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^k[1] := \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^{k+1}$, $\forall k \geq 1$. Pour $F \in \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^p[1]$ et $G \in \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^q[1]$, on défini le *crochet de Gerstenhaber* $[F, G]_a \in \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^{p+q}[1]$ par

$$\begin{aligned} [F,G]_a\,(X_1, \ldots, X_{p+q+1}) := \\ (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q+1,p}} & \varepsilon(\sigma)\ F(G(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(q+1)}), X_{\sigma(q+2)}, \ldots, X_{\sigma(p+q+1)}) \\ - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1,q}} & \varepsilon(\sigma)\ G(F(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p+1)}), X_{\sigma(p+2)}, \ldots, X_{\sigma(p+q+1)}) \end{aligned}$$

pour tous $X_1, \ldots, X_{p+q+1} \in \mathfrak{g}$. Comme $[S_{2k}, S_{2k}]_a = 0$, on obtient :

Proposition 2.3.2. *Tout polynôme standard S_{2n} de degré pair ($n \geq 0$) définit une structure de $2n$-algèbre de Lie sur l'algèbre associative $\mathfrak{g}$, i.e.* $[S_{2n}, S_{2n}]_a = 0$.

Nous montrons que l'algèbre $\mathcal{I}$ est abélienne par rapport au cup produit de $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$. De plus, si $\mathfrak{g}$ est munie d'une trace $\mathrm{Tr} : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, alors on montre que $\mathrm{Tr}(S_{2n+1})$ $(n \geq 0)$ est un cocycle invariant pour la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (donnée par S_2). Regardons par exemple le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(n)$. La cohomologie de $\mathfrak{g}$ est complètement décrite par les traces des polynômes standard :

$$H^*(\mathfrak{g}) = \bigwedge(\mathrm{Tr}(S_1), \mathrm{Tr}(S_3), \ldots, \mathrm{Tr}(S_{2n-1})).$$

D'après le théorème d'Amitsur-Levitzki :

$$S_k = 0, \forall\, k \geq 2n.$$

Alors $\mathcal{I}$ est un espace de dimension $2n$ et $\mathcal{I} \simeq \mathbb{C}[X]/X^{2n}$. Nous reparlerons de ce beau théorème d'Amitsur-Levistzki dans le prochain chapitre.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est l'espace des applications linéaires de rang fini sur un espace vectoriel de dimension <u>infinie</u>, alors nous prouvons que

$$H^*(\mathfrak{g}) = \bigwedge(\mathrm{Tr}(S_1), \mathrm{Tr}(S_3), \ldots, \mathrm{Tr}(S_{2n-1}), \ldots).$$

2.3.2 Algèbres de Lie quadratiques

Dans **[PU07]**, nous nous sommes également intéressés aux algèbres de Lie quadratiques, le but étant d'étudier les déformations de ces algèbres. Je rappelle ici ce que l'on veut dire par algèbre de Lie quadratique :

Définition 2.3.2 Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *quadratique* si elle est munie d'une forme bilinéaire symétrique invariante (i.e. $f([X,Y],Z) = f(X,[Y,Z]), \forall X, Y \in \mathfrak{g}$).

Soient $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel quadratique et $\bigwedge(\mathfrak{g})$ son algèbre de Grassmann. On considère la structure d'algèbre de Lie graduée sur $\bigwedge(\mathfrak{g})$ provenant d'un super-crochet de Poisson (voir 5.1.3, p. 38). Rappelons que comme l'algèbre de Weyl peut-être réalisée comme une déformation de l'algèbre de polynômes, l'algèbre de Clifford peut être réalisée de manière similaire comme une déformation de $\bigwedge_n$

Nous utilisons le super-crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ pour associer à une algèbre de Lie quadratique $(\mathfrak{g}, B)$, une 3-forme canonique $I \in \bigwedge^3(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ définie par :

$$I(X,Y,Z) := B([X,Y],Z), \ \forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{g}. \tag{2.1}$$

Cette forme satisfait

Proposition 2.3.3.
$$\{I, I\} = 0.$$

Réciproquement, soient $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel quadratique de dimension finie et I une 3-forme non nulle dans $\bigwedge^3(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Nous prouvons dans **[PU07]** qu'il existe une structure d'algèbre de Lie quadratique sur $\mathfrak{g}$ telle que I est sa forme canonique associée.

2.3.3 Algèbres de Lie quadratiques élémentaires

Dans le reste de cette section, $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie quadratique de dimension finie munie d'une forme bilinéaire B.

Définition 2.3.3 On dit que $\mathfrak{g}$ est *élémentaire* si sa 3-forme canonique associée $I \in \bigwedge^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ est décomposable.

Dans **[PU07]**, nous montrons une propriété assez simple de ces algèbres :

Proposition 2.3.4. *Si* $\mathfrak{g}$ *n'est pas abélienne, alors* $\dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \geq 3$. *De plus,* $\mathfrak{g}$ *est élémentaire si, et seulement si,* $\dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 3$.

Nous avons un résultat de réduction pour $\mathfrak{g}$ non abélienne à une sous-algèbre de Lie quadratique $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}$ telle que son centre $Z(\mathfrak{l})$ est totalement isotrope. De plus, $\mathfrak{l}$ est élémentaire si, et seulement si, $\mathfrak{g}$ est élémentaire. À l'aide de cette réduction, dans notre article nous donnons une classification complète des algèbres de Lie quadratiques élémentaires. On remarquera que les orbites coadjointes d'une algèbre de Lie élémentaires sont de dimension au plus 2.

Nous étudions également dans **[PU07]** la cohomologie cyclique des algèbres de Lie quadratiques. Pour un espace vectoriel quadratique $\mathfrak{q}$, nous utilisons des cochaînes à valeurs dans $\mathfrak{q}$, ce qui nous permet de démontrer que l'espace des cochaînes cycliques $\mathcal{C}_c(\mathfrak{q})$ est une sous-algèbre de $\mathrm{Alt}(\mathfrak{q})$. Si $\mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie, alors $\mathcal{C}_c(\mathfrak{q})$ est un sous-complexe du complexe de cohomologie adjointe de $\mathrm{Alt}(\mathfrak{q})$. La cohomologie cyclique $H_c^*(\mathfrak{q})$ de $\mathfrak{q}$ est définie comme la cohomologie de ce sous-complexe.

Dans le cas de $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive quadratique de dimension finie, nous démontrons que
$$H_c^*(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{C}_c(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$
De plus, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors pour tous I, $I' \in \bigwedge(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, on a $\{I, I'\} = 0$.

2.4 Un nouvel invariant des algèbres de Lie quadratiques

*Dans [**DPU10**], nous définissons avec Minh Thanh Duong et Georges Pinczon un nouvel invariant des algèbres de Lie quadratiques. Une telle algèbre est singulière lorsque son invariant est non nul. Dans ce travail, nous donnons une étude complète ainsi qu'une classification des algèbres de Lie quadratiques singulières.*

Ce travail est une suite à l'article **[PU07]** décrit ci-dessus. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique non abélienne munie d'une forme bilinéaire B. Rappelons (voir 2.1, p. 11) qu'il existe une 3-forme non nulle invariante canonique $I \in \bigwedge^3(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ définie par :

$$I(X, Y, Z) := B([X, Y], Z), \ \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \text{ avec } \{I, I\} = 0,$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne le super-crochet de Poisson. Réciproquement, pour un espace vectoriel quadratique $\mathfrak{g}$ et une 3-forme non nulle $I \in \bigwedge^3(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ donnée, alors il existe une structure d'algèbre de Lie quadratique sur $\mathfrak{g}$ telle que I est sa forme canonique associée. Nous avons donc une bijection entre l'ensemble $\mathcal{Q}(n)$ des structures d'algèbres de Lie quadratiques non abéliennes sur $\mathbb{C}^n$ et l'ensemble des 3-formes $I \in \bigwedge(\mathbb{C}^n)$ telles que $\{I, I\} = 0$. Nous démontrons dans **[DPU10]**, une propriété intéressante qui est que $\mathcal{Q}(n)$ est une variété affine dans $\bigwedge^3(\mathbb{C}^n)$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique non abélienne munie d'une forme bilinéaire B. On dénote par I sa 3-forme canonique associée. Considérons le nombre suivant associé à $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{dup}(\mathfrak{g}) = \dim\left(\{\alpha \in \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge I = 0\}\right)$$

Ce nombre peut prendre les valeurs 0, 1 et 3 et mesure la décomposabilité de la 3-forme canonique associée I.

On dit que deux algèbres de Lie quadratiques $(\mathfrak{g}, B)$ et $(\mathfrak{g}', B')$ sont *isométriquement isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tel que $B(\Phi(X), \Phi(Y)) = B(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. On démontre dans **[DPU10]** que :

Proposition 2.4.1. *Deux algèbres de Lie quadratiques $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ isométriquement isomorphes satisfont*

$$\mathrm{dup}(\mathfrak{g}) = \mathrm{dup}(\mathfrak{g}').$$

Nous utilisons la nomenclature suivante :

Définition 2.4.1

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique non abélienne munie d'une forme bilinéaire B.

1. $\mathfrak{g}$ est appelée *ordinaire* si $\mathrm{dup}(\mathfrak{g}) = 0$.
2. $\mathfrak{g}$ est appelée *singulière de type* S_1 si $\mathrm{dup}(\mathfrak{g}) = 1$
3. $\mathfrak{g}$ est appelée *singulière de type* S_3 si $\mathrm{dup}(\mathfrak{g}) = 3$

Dans notre travail, nous démontrons que :

Théorème 2.4.2.

1. *$\mathcal{Q}(n)$ est non vide si, et seulement si, $n \geq 3$*
2. *L'ensemble des structures d'algèbres de Lie quadratiques ordinaires sur $\mathbb{C}^n$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{Q}(n)$. De plus, il est non vide si, et seulement si, $n \geq 6$.*
3. *L'ensemble des structures d'algèbres de Lie quadratiques singulières est un fermé de Zariski de $\mathcal{Q}(n)$.*

Donc, pour $n \geq 6$, une structure d'algèbre de Lie quadratique générique sur $\mathbb{C}^n$ est ordinaire.

Une algèbre de Lie singulière est de type $\mathcal{S}_3$ si et seulement si, sa 3-forme associée I est décomposable. Dans **[PU07]**, nous donnons une classification de ces algèbres, à isomorphisme isométrique près (voir 2.3.3, p. 12).

Une double extension est une notion intéressante introduite par Victor Kac en 1985 [Kac85] dans la construction des algèbres de Lie quadratiques :

Définition 2.4.2

1. Soit $(\mathfrak{q}, B_\mathfrak{q})$ un espace vectoriel quadratique et soit $\overline{C} : \mathfrak{q} \to \mathfrak{q}$ une application antisymétrique (i.e. $\overline{C}$ satisfait $\overline{C}^* = -\overline{C}$, où $\overline{C}^*$ désigne l'application adjointe de $\overline{C}$ par rapport à la forme $B_\mathfrak{q}$). Soit $(\mathfrak{t} = \mathrm{Vect}\{X_1, Y_1\}, B_\mathfrak{t})$ l'espace vectoriel quadratique de dimension 2 où $B_\mathfrak{t}$ est définie par
$$B_\mathfrak{t}(X_1, X_1) = B_\mathfrak{t}(Y_1, Y_1) = 0,\ B_\mathfrak{t}(X_1, Y_1) = 1.$$
On considère
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{t}$$
munie d'une forme bilinéaire $B := B_\mathfrak{q} + B_\mathfrak{t}$ et on définit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ par
$$[X + \lambda X_1 + \mu Y_1, Y + \lambda' X_1 + \mu' Y_1] := \mu\overline{C}(Y) - \mu'\overline{C}(X) + B(\overline{C}(X), Y)X_1,$$
pour tous $X, Y \in \mathfrak{q}, \lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{C}$. Alors $(\mathfrak{g}, B)$ est une algèbre de Lie quadratique résoluble. On dit que $\mathfrak{g}$ est la *double extension* de $\mathfrak{q}$ par $\overline{C}$.

2. Soient $\mathfrak{g}_i$ les doubles extensions des espaces quadratiques $(\mathfrak{q}_i, B_i)$ par les applications antisymétriques $\overline{C}_i \in \mathcal{L}(\mathfrak{q}_i)$, pour $1 \leq i \leq k$. Le *produit amalgamé*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \underset{\mathrm{a}}{\times} \mathfrak{g}_2 \underset{\mathrm{a}}{\times} \dots \underset{\mathrm{a}}{\times} \mathfrak{g}_k$$

est défini de la façon suivante :
- on considère l'espace quadratique $(\mathfrak{q}, B)$ avec $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{q}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{q}_k$ et la forme bilinéaire B qui satisfait $B(\sum_{i=I}^{k} X_i, \sum_{i=I}^{k} Y_i) = \sum_{i=I}^{k} B_i(X_i, Y_i)$, pour $X_i, Y_i \in \mathfrak{q}_i$, $1 \leq i \leq k$.
- l'application antisymétrique $\overline{C} \in \mathcal{L}(\mathfrak{q})$ est définie par $\overline{C}(\sum_{i=I}^{k} X_i) = \sum_{i=I}^{k} \overline{C}_i(X_i)$, pour tous $X_i \in \mathfrak{q}_i$, $1 \leq i \leq k$.

Alors $\mathfrak{g}$ est la double extension de $\mathfrak{q}$ par $\overline{C}$.

Pour ce qui concerne les algèbres de Lie quadratiques de type $\mathcal{S}_1$, nous montrons dans **[DPU10]** que :

Théorème 2.4.3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique.*

(1) Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type $\mathcal{S}_1$. Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble. De plus $\mathfrak{g}$ est une double extension.
(2) $\mathfrak{g}$ est singulière et résoluble si, et seulement si, $\mathfrak{g}$ est une double extension.

Rappelons qu'à chaque double extension, on a un endomorphisme antisymétrique associé. D'après le théorème ci-dessus, on associe donc une application antisymétrique $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ à une algèbre de Lie quadratique résoluble $\mathfrak{g}$ et réciproquement. Cela nous permet d'établir un lien remarquable entre les structures d'algèbres de Lie quadratiques sur $\mathbb{C}^{n+2}$ et les orbites adjointes de $\mathfrak{o}(n)$:

Théorème 2.4.4. *Il existe une bijection entre l'ensemble des* $\mathrm{O}(n)$*-orbites de* $\mathbb{P}^1(\mathfrak{o}(n))$ *et l'ensemble des classes d'i-isomorphismes de l'ensemble des structures d'algèbres de Lie quadratiques de type $\mathcal{S}_1$ sur $\mathbb{C}^{n+2}$.*

Le but étant d'étudier les classes d'i-isomorphismes dans l'ensemble des structures d'algèbres de Lie quadratiques singulières sur $\mathbb{C}^{n+2}$, nous commençons par examiner deux cas : $C \in \mathfrak{o}(n)$ est semi-simple, ou nilpotent.

Dans le cas semi-simple (ou diagonalisable), nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 2.4.5. *Il existe une bijection entre les orbites semi-simples dans $\mathbb{P}^1(\mathfrak{o}(n))$ et l'ensemble des structures d'algèbre de Lie quadratiques résolubles sur $\mathbb{C}^{n+2}$ pour lesquelles C est semi-simple.*

Dans le cas nilpotent, nous avons :

Proposition 2.4.6. *Il existe une bijection entre les orbites nilpotentes de $\mathfrak{o}(n)$ et l'ensemble des structures d'algèbre de Lie quadratiques résolubles sur $\mathbb{C}^{n+2}$ pour lesquelles C est nilpotent.*

En utilisant la décomposition de Fitting de $C \in \mathfrak{o}(n)$, nous montrons l'équivalence des notions d'isomorphisme et i-isomorphisme pour les algèbres de Lie quadratiques singulières résolubles :

Théorème 2.4.7. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie singulières résolubles. Alors*

$\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}'$ si, et seulement si $\mathfrak{g}$ est isométriquement isomorphe à $\mathfrak{g}'$.

Au passage, nous obtenons une classification complète des orbites adjointes de $\mathfrak{o}(n)$.

Un des résultats principaux de **[DPU10]** est l'invariance de dup par isomorphisme :

Théorème 2.4.8. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie isomorphes. Alors*

$$\mathrm{dup}(\mathfrak{g}) = \mathrm{dup}(\mathfrak{g}').$$

Chapitre

3 Autour des super-algèbres de Lie

Mes travaux liés à la théorie des super-algèbres de Lie ont essentiellement suivi trois directions non complètement déconnectées que l'on retrouvera dans ce chapitre. La première section porte sur la généralisation du célèbre théorème d'Amitsur-Levitzki pour l'algèbre de Lie des matrices complexes aux super-algèbres de Lie : un théorème de ce type est vrai pour les super-algèbres de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$! L'algèbre de Weyl est l'objet de la deuxième section : il s'agit d'une algèbre de Lie et d'une super-algèbre de Lie. Elle est en fait, une super-algèbre de Lie super-quadratique grâce à la forme bilinéaire associée à la super-trace définie à l'aide du $\star$ -produit de Moyal. On retrouve l'algèbre de Weyl dans la troisième section, unifiée avec celle de Clifford dans l'algèbre Clifford-Weyl. Je me suis principalement intéressée à la théorie des déformations de cette algèbre.

3.1 Un super-théorème d'Amitsur-Levitzki

*Avec Pierre-Alexandre Gié et Georges Pinczon, nous avons prouvé une version du théorème d'Amitsur-Levitzki pour les super-algèbres de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$ en suivant une démonstration de Bertram Kostant dans le cas classique [**GPU03**, **GPU06**]. Nous avons pour cela démontré des super-versions des propriétés et résultats nécessaires à la démonstration dans le cas classique en définissant notamment un super-opérateur de transgression de Cartan-Chevalley.*

Soit A une algèbre associative sur un corps $\mathbb{K}$. Un polynôme $f(x_1,\ldots,x_n)$ dans l'algèbre associative libre à une infinité de variables $\mathbb{K}\langle x_1,x_2,x_3,\ldots\rangle$ est une *identité polynomiale* sur A si

$$f(a_1,\ldots,a_n)=0, \text{ pour tous } a_1,\ldots,a_n\in A.$$

On dit que A est une *algèbre à identité polynomiale* (en anglais, *a PI algebra*) s'il existe un polynôme f dans $\mathbb{K}\langle x_1,x_2,x_3,\ldots\rangle$ ayant au moins un coefficient de plus haut degré égal à 1 et tel que f est une identité polynomiale sur A.

Rappelons maintenant la définition du polynôme standard S_n ($n \geq 1$) sur l'algèbre A (voir Définition 2.3.1, p. 10) :

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

On désigne par $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique et par $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Un théorème très important dans la théorie des algèbres à identité polynomiale est le célèbre théorème d'Amitsur-Levitzki. En quête d'une identité polynomiale aussi simple et belle que le théorème de Cayley-Hamilton, Shimshon Amitsur et Jakov Levitzki ont démontré en 1950 le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 (Amitsur-Leviztki).

Le polynôme standard $S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ est une identité polynomiale sur l'ensemble des matrices complexes d'ordre n.

Cela veut dire que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma) M_{\sigma(1)} \ldots M_{\sigma(2n)} = 0,$$

pour toutes matrices complexes $M_1, \ldots, M_{2n}$ d'ordre n.

Plusieurs preuves de ce théorème sont connues telles que celle de Shmuel Rosset, basée sur le théorème d'Hamilton-Cayley, ou celle de Bertram Kostant, basée sur des arguments provenant de la théorie de représentations. Plus précisément, Kostant utilise dans [Kos58] le théorème de Chevalley sur les invariants, l'opérateur de transgression de Cartan-Chevalley et le théorème de Hopf-Koszul-Samelson. Kostant résout le problème de trouver un indice minimal pour toutes les représentations de dimension finie d'une algèbre de Lie réductive dans [Kos81]. Il démontre ainsi que cet indice est $2n$ pour $\mathfrak{sl}(n)$, $4n + 2$ pour $\mathfrak{so}(2n + 1)$ et $4n - 2$ pour $\mathfrak{so}(2n)$.

Avant de continuer à décrire notre étude, je me permets de faire quelques rappels. Une *super-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ muni d'un produit $[\cdot, \cdot]$ appelé *super-crochet de Lie* qui satisfait :

- $[X, Y] = -(-1)^{xy}[Y, X]$ (super antisymétrique)
- $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{xy}[Y, [X, Z]]$ (super-identité de Jacobi)

où $X \in \mathfrak{g}_x$ et $Y \in \mathfrak{g}_y$ avec $x, y \in \mathbb{Z}_2$. On appelle $X \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ un élément *pair* et $X \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ un élément *impair*.

Pour $p, q \geq 1$, on désigne par $\mathfrak{gl}(p, q)$ la super-algèbre de Lie formée des endomorphismes $\mathrm{End}(V)$ d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ où $\dim(V_{\bar{0}}) = p$ et

$\dim(V_{\bar{1}}) = q$ et qui est graduée par

$$\mathfrak{gl}(p,q)_\alpha = \{U \in \mathrm{End}(V) \mid U(V_\beta) \subset V_{\alpha+\beta}, \forall \beta \in \mathbb{Z}_2\} \text{ pour } \alpha \in \mathbb{Z}_2.$$

Une forme bilinéaire F définie sur V est dite *super-symétrique* si

$$F(X,Y) = (-1)^{xy} F(Y,X),$$

pour tous $X \in V_x$ et $Y \in V_y$ avec $x, y \in \mathbb{Z}_2$.

La *super-algèbre de Lie orthosymplectique* $\mathfrak{osp}(m,2n)$ est la super-algèbre de Lie formée des invariants de la forme bilinéaire super-symétrique F définie sur l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^{2n}$ par la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m,2n)$ où J dénote la matrice d'ordre $2n$ ayant des éléments 1 sur la diagonale secondaire et 0 partout ailleurs. En d'autres mots,

$$\mathfrak{osp}(m,2n) = \{U \in \mathfrak{gl}(m,2n)_u \mid F(U(X),Y) + (-1)^{ux} F(X,U(Y)) = 0, \forall X \in V_x, Y \in V_y\}$$

Avec Pierre-Alexandre Gié et Georges Pinczon, nous nous sommes intéressés à une version du théorème d'Amitsur-Levitzki pour les super-algèbres de Lie. Pour $k \geq 1$, nous définissons un *super-polynôme standard* sur la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(p,q)$ par :

$$\mathcal{A}_k(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, X) X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(k)}$$

pour tous $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{gl}(p,q)$ où $\varepsilon(\sigma, X) = (-1)^{K(\sigma,X)}$ est la *super-signature* avec $K(\sigma, X) = \mathrm{card}\{(i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)} \text{ éléments impairs}\}$. On voit que sur les éléments pairs, on retrouve le polynôme standard S_k.

Nous démontrons un théorème de type Amitsur-Levitzki non pas pour les super-algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(p,q)$, mais pour les orthosymplectiques $\mathfrak{osp}(1,2n)$:

Théorème 3.1.2.

Le super-polynôme standard $\mathcal{A}_{4n+2}(x_1, \ldots, x_{4n+2})$ est une identité polynomiale sur $\mathfrak{osp}(1,2n)$.

On pourrait penser que dans le cas de la super-algèbre $\mathfrak{gl}(p,q)$, le super-polynôme standard serait le candidat idéal pour remplacer le polynôme standard dans le théorème d'Amitsur-Levitzki. Néanmoins, pour un élément non nilpotent $X \in \mathfrak{gl}(p,q)_{\bar{1}}$, on vérifie facilement que

$$\mathcal{A}_k(X, \ldots, X) = k! X^k \neq 0 \text{ pour tout } k.$$

Cela nous dit que $\mathcal{A}_k(x_1, \ldots, x_k)$ n'est pas une identité polynomiale sur $\mathfrak{gl}(p,q)$. L'espoir de trouver un théorème d'Amitsur-Levitzki pour les super-algèbres de Lie apparaît alors d'une propriété importante des algèbres traitées par Kostant dans ses démonstrations [Kos58, Kos81] : leur anneau d'invariants est polynômial. Une seule super-algèbre de Lie satisfait cette condition : $\mathfrak{osp}(1,2n)$. Son anneau d'invariants est une algèbre de polynômes en n variables, un fait démontré par Ian M. Musson [Mus97].

Un élément important dans la preuve du théorème ci-dessus est l'opérateur de transgression $t : \mathsf{S}(\mathfrak{g}^*) \to \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ défini par Chevalley dans les années 50. Nous utilisons une version de cet opérateur pour les super-algèbres de Lie. Lorsqu'on applique l'opérateur de transgression sur l'invariant défini par la super-trace du *super-polynôme standard symétrique*

$$\mathcal{S}_k(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma,X)X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(k)},$$

on obtient :

Proposition 3.1.3.

$$t(\mathrm{Str}(\mathcal{S}_k)) = (-1)^{k-1}k\ \mathrm{Str}(\mathcal{A}_{2k-1})$$

On rappele que la super-trace Str d'un élément $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(p,q)$ est donné par $\mathrm{Str}(X) = Tr(A) - Tr(D)$. Les autres ingrédients de la démonstration sont donnés par le lemme suivant :

Lemme 3.1.4. *Pour tous $X_1,\ldots,X_{2k+1} \in \mathfrak{osp}(1,2n)$, on a :*

1. $\mathrm{Str}(\mathcal{A}_{2k}(X_1,\ldots,X_{2k})) = 0$
2. $\mathrm{Str}(\mathcal{A}_{2k+1}(X_1,\ldots,X_{2k+1})) = (2k+1)B(\mathcal{A}_{2k}(X_1,\ldots,X_{2k}),X_{2k+1})$ *où B est la forme bilinéaire super-symétrique non dégénérée définie par $B(X,Y) := \mathrm{Str}(XY)$, $\forall\ X,Y \in \mathfrak{osp}(1,2n)$.*
3. $\mathcal{A}_k(X_1,\ldots,X_k) \in \mathfrak{osp}(1,2n)$ *si $k \equiv 1,2 \pmod 4$.*

Concernant le meilleur indice pour lequel le super-polynôme standard est identiquement nul sur la super-algèbre de Lie orthosymplectique, en utilisant le théorème de Hopf-Koszul-Samelson sur $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2n)$, on obtient que $\mathcal{A}_{4n}$ ne s'annule pas sur $\mathfrak{osp}(1,2n)$. Des calculs nous montrent que $\mathcal{A}_{4n+1}$ n'est pas identiquement nul dans les cas $n = 1,2$ et 3. Le cas général reste à être démontré.

3.2 Une super-trace sur l'algèbre de Weyl

En utilisant le $\star$-produit de Moyal et la super-symétrie orthosymplectique, Georges Pinczon et moi même avons construit une super-trace non triviale assez naturelle *et sa forme bilinéaire associée super-symétrique, invariante et non dégénérée pour la structure de super-algèbre de Lie de l'algèbre de Weyl* W *[**PU05**]. Nous avons étudié les représentations adjointes et adjointes tordues de* W*. Nous avons défini une super-trace renormalisée et une transformée de Weyl inverse formelle dans un cadre de théorie de quantification par déformation.*

L'existence d'une forme bilinéaire symétrique invariante et non dégénérée sur une algèbre de Lie donne lieu à la définition d'une algèbre de Lie quadratique [**PU05**, **DPU10**]. D'une façon similaire, une super-algèbre de Lie super-quadratique est une super-algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire super-symétrique invariante non dégénérée.

Le travail réalisé avec Georges Pinczon traite de la construction d'une super-trace sur l'algèbre de Weyl W et de quelques conséquences intéressantes. Nous considérons l'algèbre de Weyl W en $2n$ générateurs comme l'algèbre de polynômes en $2n$ variables $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ munie du $\star$-produit de Moyal, dénoté $\star$. Pour plus de détails sur l'algèbre de Weyl, voir l'annexe 5.1 (p. 37).

Rappelons que le $\star$-produit de Moyal est une quantification naturelle du crochet de Poisson. On pose $\mathsf{S} := \mathbb{K}[p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n]$ l'algèbre de polynômes, qui est donc isomorphe à W. La quantification est le passage :

$$\begin{array}{ccc} \text{fonctions} & \longrightarrow & \text{opérateurs} \\ \mathsf{S} & \xrightarrow{\rho} & \mathsf{W} \end{array}$$

Cela équivaut à un choix d'un *ordering*, i.e. un choix de l'isomorphisme d'algèbres ρ. L'*ordering* normal ρ_N, par exemple, envoie un monôme dans S sur le même monôme sur W, avec leurs produits respectifs. L'*ordering* Weyl ρ_{W} envoie un monôme dans S sur sa symétrisation. Si l'on transporte le produit de W sur S, on passe d'un opérateur différentiel à une fonction (son symbole). Dans le cas de l'*ordering* normal, on obtient sur S le produit normal $\times_N$. Dans le cas de l'*ordering* Weyl, on obtient le $\star$-produit de Moyal. La différence entre ces deux produits peut-être observée par exemple dans le cas $n = 1$: on a $\mathsf{S} = \mathbb{K}[p, q]$ et

$$\begin{aligned} q \times_N p &= \rho_N^{-1}\left(\overbrace{qp}^{\text{produit dans W}}\right) = qp \\ q \star p &= \rho_{\mathsf{W}}^{-1}\left(\overbrace{qp}^{\text{produit dans W}}\right) = \rho_{\mathsf{W}}^{-1}\left(\overbrace{\frac{1}{2}(qp + pq)}^{\rho_{\mathsf{W}}(qp)} + \frac{1}{2}\overbrace{(qp - pq)}^{=-1}\right) = qp - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a un isomorphisme d'algèbres entre $(\mathsf{W}, \cdot)$ et $(\mathsf{S}, \star)$ et on peut identifier ces deux algèbres.

Le crochet de Lie sur W induit sur S le *crochet de Poisson* $\{\cdot,\cdot\}$. On peut donc écrire $\star$ comme une déformation du crochet de Poisson :

$$F \star G = FG + \frac{1}{2}\{F,G\} + \sum_{k\geq 2} C_k(F,G),\ \forall F,G \in \mathsf{S},$$

où les C_k sont certains opérateurs bidifférentiels d'ordre (k,k).

L'algèbre de Weyl est naturellement $\mathbb{Z}_2$-graduée : on a $\deg_{\mathbb{Z}_2}(p_i) = \deg_{\mathbb{Z}_2}(q_i) = 1$, $1 \leq i \leq n$. En considérant le $\star$-produit, nous pouvons considérer deux structures de Lie différentes sur W :

- W algèbre de Lie :

  $$\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(F)(G) = [F,G]_{\mathcal{L}} := F \star G - G \star F,\ \forall\ F,G \in \mathsf{W}.$$

  On a $[\mathsf{W},\mathsf{W}]_{\mathcal{L}} = \mathsf{W}$. Ici, on n'a pas de trace non triviale car $\mathrm{Tr}(F \star G) = \mathrm{Tr}(G \star F)$ ce qui implique $\mathrm{Tr}([F,G]_{\mathcal{L}}) = 0$ pour tous F et $G \in \mathsf{W}$. On n'a pas non plus de forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée.
- W super-algèbre de Lie :

  $$\mathrm{ad}(F)(G) = [F,G] := F \star G - (-1)^{\deg_{\mathbb{Z}_2}(F)\deg_{\mathbb{Z}_2}(G)} G \star F,\ \forall\ F,G \in \mathsf{W}.$$

Dans l'article écrit en collaboration avec Georges Pinczon **[PU05]**, nous définissons une super-trace sur W :

Proposition 3.2.1 (Définition de la super-trace). *On définit* Str : $\mathsf{W} \to \mathbb{K}$ *par*

$$\mathrm{Str}(F) := F(0),\ \forall\ F \in \mathsf{W}.$$

Alors Str *est une* super-trace *sur l'algèbre de Weyl* W, *i.e.* Str *est homogène (envoie les éléments pairs sur les éléments pairs, les impairs sur les impairs) et* $\mathrm{Str}([F,G]) = 0$, *pour tous* F, $G \in \mathsf{W}$.

Nous avons démontré :

Proposition 3.2.2.

$$\ker(\mathrm{Str}) = [\mathsf{W},\mathsf{W}]$$

À l'aide de l'action adjointe tordue ad' sur W définie par

$$\mathrm{ad}'(F)(G) := F \star G - (-1)^{\deg_{\mathbb{Z}_2}(F)(\deg_{\mathbb{Z}_2}(G)+1)} G \star F,\ \forall\ F,G \in \mathsf{W}.$$

on obtient le joli résultat ci-dessous, à l'origine démontrée par Ian M. Musson dans [Mus99] par une méthode très différente et dont la preuve est simplifiée avec l'utilisation de la super-trace :

Proposition 3.2.3. *On a* $\mathsf{W} = \mathbb{K} \oplus [\mathsf{W}, \mathsf{W}]$.

Une fois que l'on a une super-trace, on pense à définir une "super-forme". La forme bilinéaire associée à la super-trace, appelée κ, est définie par :

$$\kappa(F, G) := \mathrm{Str}(F \star G), \ \forall\ F, G \in \mathsf{W}.$$

On a démontré la proposition suivante :

Proposition 3.2.4.

κ est une forme bilinéaire super-symétrique, invariante et non dégénérée sur W.

Un des principaux résultats de **[PU05]** est par conséquent :

Théorème 3.2.5.

L'algèbre de Weyl est une super-algèbre de Lie super-quadratique munie d'une forme bilinéaire dérivée d'une super-trace.

Dans l'article, nous donnons également les décompositions des représentations $([\mathsf{W}, \mathsf{W}], \mathrm{ad})$, $(\mathsf{W}, \mathrm{ad}')$, $(\mathsf{W}, \mathrm{ad}_{\mathcal{L}})$ et $(\mathsf{W}, \mathrm{ad}'_{\mathcal{L}})$, où l'action adjointe tordue $\mathrm{ad}'_{\mathcal{L}}$ sur l'algèbre de Lie W est définie par

$$\mathrm{ad}'_{\mathcal{L}}(F)(G) = F \star G - (-1)^{\deg_{\mathbb{Z}_2}(F)} G \star F, \ \forall\ F, G \in \mathsf{W}.$$

Une partie de l'article traite également de la renormalisation de la super-trace. Georges Pinczon a démontré que tout opérateur de l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un opérateur différentiel, peut-être d'ordre infini [Pin97] :

Proposition 3.2.6 (Pinczon). *Tout opérateur T de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est un opérateur différentiel et T s'écrit*

$$T = \sum_K T_k \frac{\partial^K}{\partial x^K},$$

où $x^K := x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ et $\frac{\partial^K}{\partial x^K} := \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ si $K = (k_1, \ldots, k_n)$.

En utilisant ce résultat et le fait que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est une algèbre de Hopf, nous donnons une formule explicite pour tout opérateur T de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$:

Lemme 3.2.7.
$$T = \sum_K \frac{1}{K!} \left(m \circ (T \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta\right) (x^K) \frac{\partial^K}{\partial x^K},$$
où m est le produit, $\mathcal{S}$ l'antipode de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ et Δ le coproduit,

Cette formule donne le symbole (formel) de T dans l'ordering normal et pour un T bien comporté, son symbole dans l'ordering Weyl. Par exemple, dans le cas $n = 1$, on fixe i, $j \in \mathbb{N}$ et on prend T l'opérateur de $\mathbb{K}[x]$ défini par $T(x^i) = x^j$. On peut écrire alors
$$T = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \, T_k \, \frac{d^k}{dx^k},$$
avec $T_k = (-1)^{k-i} C_k^i x^{k+j-1}$ pour tout $k \geq i$.

En utilisant la notation évidente avec des multi-indices, on pose $\overline{\mathsf{W}} = \mathbb{K}[Q][[P]]$ la complétion de $(\mathsf{W}, \star\,)$. On montre que W est une algèbre isomorphe à l'algèbre des endomorphismes $\mathcal{L}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$. Ce lemme nous permet donc d'écrire un opérateur T de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sous la forme
$$T = \sum_I \alpha_I(Q) \star P^I.$$

La super-trace définie sur W s'étend naturellement sur $\overline{\mathsf{W}}$, notons la $\mathrm{Str}_{\overline{\mathsf{W}}}$. Dans le domaine de $\mathrm{Str}_{\overline{\mathsf{W}}}$, on trouve par exemple les opérateurs de rang fini. Pour ces opérateurs, nous pouvons aussi considérer la super-trace naturelle :
$$\mathrm{Str}_{\mathrm{naturelle}}(\varphi \otimes F) = (-1)^{\deg_{\mathbb{Z}_2}(\varphi) \deg_{\mathbb{Z}_2}(F)} \varphi(F), \varphi \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^*, F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$
Un résultat intéressant est énoncé dans le lemme :

Lemme 3.2.8. *Pour un opérateur de rang fini de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, on a*
$$\mathrm{Str}_{\mathrm{naturelle}}(T) = \frac{1}{2^n} \mathrm{Str}_{\overline{\mathsf{W}}}(T).$$

Par ailleurs, la *super-trace naïve* d'un opérateur T de $\mathbb{K}[x]$ peut se définir par :
$$\mathrm{Str}_{\mathrm{naïve}}(T) = \sum_k (-1)^k t_k$$
où les t_k sont les coefficients diagonaux de T. Si $T \in \mathsf{W}$, la série diverge automatiquement, comme par exemple dans le cas $T = \mathrm{Id}$. Par contre $\mathrm{Str}_{\overline{\mathsf{W}}}(T)$ peut exister, dans l'exemple

$\mathrm{Str}_{\overline{\mathrm{W}}}(\mathrm{Id}) = 1$. D'où l'idée de définir la super-trace renormalisée d'un opérateur T de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$:

Definition 3.2.1 La *super-trace renormalisée* RStr définie sur le domaine de définition de $\mathrm{Str}_{\overline{\mathrm{W}}}$ est

$$\mathrm{RStr}(T) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{Str}_{\overline{\mathrm{W}}}(T)$$

Il en résulte $\mathrm{RStr}(\mathrm{Id}) = \dfrac{1}{2^n}$. Lorsque $n = 1$, on a $\mathrm{RStr}(\mathrm{Id}) = \dfrac{1}{2}$, ce qui renormalise la série divergente $\sum_k (-1)^k$, et explique le coefficient $\dfrac{1}{2}$.

Voici deux exemples amusants pour T un opérateur de $\mathbb{K}[x]$:

(1) si $T = \left(x\dfrac{d}{dx}\right)^m$ $(m \geq 0)$, on a $\mathrm{RStr}(T) = \dfrac{1}{2}E_m(0)$ où $E_m(X)$ désigne le polynôme d'Euler.

(2) si $T = \left[x, \dfrac{d}{dx}\right]^m$ $(m \geq 0)$, on a $\mathrm{RStr}(T) = \dfrac{1}{2}E_m$ où E_m désigne le nombre d'Euler.

En utilisant la notion de la super-trace renormalisée, on peut définir la transformée de Weyl inverse formelle. Il s'agit de faire le calcul de symboles : passer des opérateurs aux fonctions. Regardons le cas $n = 1$. Soit T un opérateur différentiel. On peut écrire $T = \sum_i \alpha_i(q) \circ p^i$. Si l'on calcule le symbole de T avec le produit normal, on a :

$$\mathrm{Symbol}_N(T) = \sum_i \alpha_i(q) \times_N p^i = \sum_i \alpha_i(q)\ p^i$$

qui converge. Par contre, si l'on calcule le symbole de T avec le $\star$-produit, on a :

$$\mathrm{Symbol}_{\mathrm{W}}(T) = \sum_i \alpha_i(q) \star p^i$$

qui ne converge pas toujours. On définit alors :

Définition 3.2.2 Soit $T = \sum \alpha_I(Q) \star P^I \in \mathbb{K}[[P, Q]]$ tel que $\sum \alpha_I(Q) \star P^I$ converge dans $\mathbb{K}[[P, Q]]$. La *transformée de Weyl inverse formelle* $\mathrm{IW}(T)$ de T est définie comme la somme de cette série.

L'existence de la super-trace renormalisée de T se trouve être une condition nécessaire pour l'existence de la transformée de Weyl inverse formelle :

Proposition 3.2.9. *Si* $\mathrm{IW}(T)$ *existe, alors*

$$\mathrm{RStr}(T) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{IW}(T)(0).$$

Voyons deux exemples sur $\mathbb{K}[x]$. On considère pour un $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé, l'opérateur T défini par $T(x^k) = \lambda^k x^k$ pour tout $k \geq 0$. On calcule sa super-trace renormalisée et sa transformée de Weyl inverse formelle :

$$\begin{aligned} \mathrm{RStr}(T) &= \frac{1}{1+\lambda} \\ \mathrm{IW}(T) &= \frac{2}{1+\lambda}\exp\left(2\frac{\lambda-1}{\lambda+1}pq\right) \quad \text{si } |1-\lambda| < 2 \end{aligned}$$

Pour l'autre exemple, on considère les opérateurs élémentaires E_{ij} définis par $E_{ij}(x^k) = \delta_{jk}x^i$. alors on a

$$E_{ij} = \frac{1}{j!}\sum_{\ell\geq 0}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}q^{\ell+i} \star p^{\ell+j}.$$

Quelques calculs nous permettent de dire :

Lemme 3.2.10. *La transformée de Weyl inverse formelle de* E_{ij} *est :*

$$\mathrm{IW}(E_{ij}) = \begin{cases} (-1)^j 2^{i-j+1}\frac{j!}{i!}L_j^{(i-j)}(4pq)\,\mathrm{e}^{-2pq}\,q^{i-j}, & \text{si } j \leq i \\ (-1)^i 2^{j-i+1}\frac{i!}{j!}L_i^{(j-i)}(4pq)\,\mathrm{e}^{-2pq}\,p^{j-i}, & \text{si } j \geq i \end{cases}.$$

où $L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n+\alpha}^{n-i}\frac{x^i}{i!}$ *est le polynôme de Laguerre (voir [Sze39]).*

D'autres exemples instructifs sur cette transformée de Weyl inverse formelle peuvent être trouvés dans notre article [**PU05**].

3.3 Quelques propriétés des algèbres de Clifford-Weyl

En collaboration avec Ian M. Musson et Georges Pinczon, nous avons étudié les relations entre les algèbres de Clifford $\mathcal{C}(n)$ *à n générateurs et Weyl* W_{2k} *à* $2k$ *générateurs et leurs représentations, dans le but d'unifier ces deux formalismes en utilisant des techniques provenant de la théorie des super-algèbres de Lie [**MPU09**]. L'algèbre de Clifford-Weyl est définie par* $\mathcal{C}(n,2k) = \mathcal{C}(n)\otimes\mathsf{W}_{2k}$*. Nous avons montré que*

$\mathcal{C}(n, 2k)$ est rigide lorsque n est pair ou $k \neq 1$. Nous avons trouvé toutes les déformations non triviales de $\mathcal{C}(2n+1, 2)$ et étudié leurs représentations.

Rappelons que l'algèbre de Weyl W_{2k} en $2k$ générateurs peut être réalisée comme l'algèbre de polynômes $\mathsf{S} = \mathbb{C}[p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k]$ munie du $\star$-produit de Moyal (voir par exemple la section 3.2, p. 20). Ce produit donne une déformation de S pilotée par le crochet de Poisson :

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right),\ \forall\ F, G \in \mathsf{S}$$

De façon similaire, l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(n)$ en n générateurs peut être réalisée comme l'algèbre de Grassmann $(\bigwedge_n = \bigwedge(\omega_1, \ldots, \omega_n), m_\wedge)$ munie d'un produit $\star = m_\wedge \circ \exp(-\wp)$, où $\wp$ est l'opérateur sur $\bigwedge_n \otimes \bigwedge_n$ défini par

$$\wp := \sum_{i=1}^{n} \partial_i \otimes \partial_i, \text{ avec } \partial_i(\omega_j) = \delta_{ij},\ \forall i, j$$

Ce $\star$-produit fournit une déformation de $\bigwedge_n$ pilotée par le super-crochet de Poisson :

$$\{\Omega, \Omega'\} = 2(-1)^{\deg_{\mathbb{Z}}(\Omega)+1} \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\Omega) \wedge \partial_i(\Omega'),\ \forall\ \Omega, \Omega' \in \bigwedge{}_n$$

Pour plus de détails sur l'algèbre de Clifford, voir l'annexe 5.1 (p. 37).

Pour définir l'algèbre de Clifford-Weyl, nous allons examiner l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, soit $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ avec $n = \dim(V_{\bar{0}})$ et $\dim(V_{\bar{1}}) = 2k$. On définit une graduation $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ sur $\bigwedge := \bigwedge V_{\bar{0}}$ et sur $\mathsf{S} := \mathsf{S}(V_{\bar{1}})$ par :

$$\bigwedge{}^{(i,\bar{0})} = \bigwedge{}^{i},\ \bigwedge{}^{(i,\bar{1})} = \{0\} \text{ et } \mathsf{S}^{(i,\bar{i})} = \mathsf{S}^{i},\ \mathsf{S}^{(i,\bar{j})} = \{0\} \text{ if } \bar{i} \neq \bar{j}$$

L'*algèbre extérieure* de V est l'algèbre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$-graduée

$$\mathcal{E} := \bigwedge \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathsf{S}$$

munie du produit $m_{\mathcal{E}}$ défini par

$$(\Omega \otimes F) \wedge (\Omega' \otimes F') = (-1)^{f\omega'} (\Omega \wedge \Omega') \otimes FF',\ \forall \Omega \in \bigwedge, \Omega' \in \bigwedge{}^{\omega'}, F \in \mathsf{S}^{f}, F' \in \mathsf{S}.$$

Soient σ_{23} et $\wp$ deux opérateurs sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ définis par

$$\sigma_{23}(\Omega \otimes F \otimes \Omega' \otimes F') = (-1)^{f\omega'} \Omega \otimes \Omega' \otimes F \otimes F'$$
$$\wp = \sigma_{23} \circ (-2\wp_\wedge \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \wp_{\mathsf{S}}) \circ \sigma_{23}$$

pour tous $\Omega \in \bigwedge$, $\Omega' \in \bigwedge^{\omega'}$, $F \in \mathsf{S}^{f}$, $F' \in \mathsf{S}$.

Définition 3.3.1 L'*algèbre de Clifford-Weyl* $\mathcal{C}(n,2k)$ est l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ muni du produit $\star := m_{\mathcal{E}} \circ \exp\left(\frac{1}{2}\wp\right)$.

Une première remarque à propos de cette définition : le $\star$-produit est une déformation de $m_{\mathcal{E}}$ pilotée par le $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$-super-crochet :

$$\{\Omega \otimes F, \Omega' \otimes F'\} = (-1)^{f\omega'} \left(\{\Omega, \Omega'\} \otimes FF' + (\Omega \wedge \Omega') \otimes \{F, F'\}\right),$$

pour tous $\Omega \in \bigwedge$, $\Omega' \in \bigwedge^{\omega'}$, $F \in \mathsf{S}^f$, $F' \in \mathsf{S}$. Comme $\star = m_\wedge \otimes m_{\mathsf{S}} \circ \exp\left(-\wp_\wedge\right) \otimes \exp\left(\dfrac{1}{2}\wp_{\mathsf{S}}\right) \circ \sigma_{23}$, alors

$$\mathcal{C}(n,2k) \simeq \mathcal{C}(n) \underset{\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathsf{W}_{2k}$$

Dans [**MPU09**], nous avons étudié l'algèbre de Clifford-Weyl sous plusieurs aspects, comme ses possibles déformations et son éventuel comportement périodique.

On rappelle que l'algèbre de Clifford a un comportement périodique qui se traduit par un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{C}(2n+k) \simeq \mathcal{C}(2n) \otimes \mathcal{C}(k).$$

Comme corollaire, si l'on désigne par $\mathcal{M}_r(A)$ l'algèbre des matrices d'ordre r à coefficients dans une algèbre A, on a :

Lemme 3.3.1.

$$\mathcal{C}(2n) \simeq \mathcal{C}(2)^{\otimes n} \quad \textit{et} \quad \mathcal{C}(2n+1) \simeq \mathcal{C}(2n) \otimes \mathcal{C}(1) \simeq \mathcal{M}_{2^n}\left(\mathcal{C}(1)\right)$$

L'algèbre de Clifford-Weyl a aussi un comportement périodique, très similaire à celui de l'algèbre de Clifford, énoncé dans le lemme ci-dessous :

Lemme 3.3.2.

$$\mathcal{C}(2m+n,2k) \simeq \mathcal{C}(2m) \otimes \mathcal{C}(n,2k)$$

On obtient alors :

Théorème 3.3.3.

$$\mathcal{C}(2n,2k) \simeq \mathcal{C}(2n) \otimes \mathsf{W}_{2k} \simeq \mathcal{M}_{2^n}\left(\mathsf{W}_{2k}\right) \quad \textit{et}$$

$$\mathcal{C}(2n+1,2k) \simeq \mathcal{C}(2n) \otimes \mathcal{C}(1,2k) \simeq \mathcal{M}_{2^n}\left(\mathcal{C}(1,2k)\right)$$

On remarque que $\mathcal{C}(1,2k) = \mathfrak{S}_2 \ltimes \mathsf{W}_{2k}$ avec $\mathfrak{S}_2 = \{-1,1\}$.

Corollaire 3.3.4. *Si $k \geq 1$, $\mathcal{C}(n,2k)$ est simple et son centre est $\mathbb{C}$.*

Au vu des liens algèbre de Weyl & super-symétrie et algèbre de Clifford & symétrie, nous examinons dans la suite l'éventuel lien entre l'algèbre de Clifford-Weyl et la super-symétrie. Considérons $\mathcal{C}(n,2k)$ comme une algèbre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduée et $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ avec

$$V_{\bar{0}} = \mathcal{C}(n,2k)_{(\bar{1},\bar{0})} = \bigwedge\nolimits_n^1 \text{ et } V_{\bar{1}} = \mathcal{C}(n,2k)_{(\bar{1},\bar{1})} = \mathsf{S}^1_{2k}.$$

On observe que :

- si $k = 0$, alors $\mathcal{C}(n,0) \simeq \mathcal{C}(n)$ et $V_{\bar{0}} \oplus [V_{\bar{0}}, V_{\bar{0}}]_- \simeq \mathfrak{o}(n+1)$ et $[V_{\bar{0}}, V_{\bar{0}}]_- \simeq \mathfrak{o}(n)$.
- si $n = 0$, alors $\mathcal{C}(0,2k) \simeq \mathsf{W}_{2k}$ et $V_{\bar{1}} \oplus [V_{\bar{1}}, V_{\bar{1}}] \simeq \mathfrak{osp}(1,2k)$ et $[V_{\bar{1}}, V_{\bar{1}}] \simeq \mathfrak{sp}(2k)$.

Désignons par $\Delta(a) := (\Delta_1(a), \Delta_2(a))$ le $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-degré de $a \in \mathcal{C}(n,2k)$. On va prendre en compte seulement la $\mathbb{Z}_2$-graduation sur $\mathcal{C}(n,2k)$ qui provient de Δ_2 et désigner par $[\cdot,\cdot]$ le super-crochet associé. Le théorème suivant a été démontré en 1982 par Tchavdar Palev. Dans **[MPU09]**, nous le prouvons par une méthode très différente.

Théorème 3.3.5. *Soit $\mathfrak{g} = V \oplus [V,V]$. Alors $\mathfrak{g}$ est une sub-super-algèbre de Lie de $\mathcal{C}(n,2k)$ isomorphe à $\mathfrak{osp}(n+1,2k)$. De plus*

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \underbrace{V_{\bar{0}} \oplus [V_{\bar{0}}, V_{\bar{0}}]}_{\simeq \mathfrak{o}(n+1)} \oplus \underbrace{[V_{\bar{1}}, V_{\bar{1}}]}_{\simeq \mathfrak{sp}(2k)}$$

Aussi, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = V_{\bar{1}} \oplus [V_{\bar{0}}, V_{\bar{1}}]$ and $V_{\bar{1}} \oplus [V_{\bar{1}}, V_{\bar{1}}] \simeq \mathfrak{osp}(1,2k)$. Finalement, $[V_{\bar{0}}, V_{\bar{0}}] \oplus [V_{\bar{1}}, V_{\bar{1}}] \oplus [V_{\bar{0}}, V_{\bar{1}}] \simeq \mathfrak{osp}(n,2k)$.

L'idée de la preuve est d'utiliser l'identité para-statistique satisfaite par les éléments de V :

$$[[X,Y],Z] = 2\left(\{Y,Z\}X - (-1)^{\Delta_2(X)\Delta_2(Y)}\{X,Z\}Y\right),\ \forall\ X,Y,Z \in V \qquad \text{(PS)}$$

Ensuite, on définit sur $\mathbb{C} \oplus V$, une forme bilinéaire $(X|Y) := \{X,Y\}$, $\forall\ X,Y \in V$ et $(1|1) = -2$ pour déduire de l'équation (PS) (p. 29) :

$$[[X,Y],Z] = 2\left((Y|Z)X - (-1)^{\Delta_2(X)\Delta_2(Y)}(X|Z)Y\right),\ \forall\ Z \in V$$

Pour finir, on utilise une représentation adjointe tordue par la $\mathbb{Z}_2$-graduation Δ_1 de $\mathcal{C}(n,2k)$:

$$\mathrm{ad}'(a)(b) := a \star b - (-1)^{\Delta_2(a)\Delta_2(b)+\Delta_1(a)} b \star a,\ \forall a,b \in \mathcal{C}(n,2k)$$

L'étude des déformations de l'algèbre de Clifford-Weyl $\mathcal{C}(n, 2k)$ commence par l'étude de la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{C}(n, 2k)$ à coefficients dans elle même (voir Annexe 5.2, p. 39). En utilisant le théorème 3.3.3 (p. 28), comme les espaces de cohomologie de Hochschild de deux algèbres Morita-équivalentes sont isomorphes, nous démontrons :

Théorème 3.3.6.

1. *$H^\ell(\mathcal{C}(2n, 2k)) = \{0\}$ si $\ell > 0$. Alors $\mathcal{C}(2n, 2k)$ est rigide.*
2. *$H^\ell(\mathcal{C}(2n+1, 2k)) = H^\ell(\mathcal{C}(1, 2k))$ pour tout ℓ.*

Nous démontrons également que $H^\ell(\mathcal{C}(2n+1, 2k)) = \{0\}$ pour $\ell > 0$ et $\ell \neq 2k$. De plus, nous prouvons que $\dim\left(H^{2k}(\mathcal{C}(2n+1, 2k))\right) = 1$ et l'existence du cocycle générateur en utilisant des résultats de Jacques Alev, Marco Farinatti, Thierry Lambre & Andrea Solotar [AFLS00] et de Georges Pinczon [Pin07]. On conclut donc :

Corollaire 3.3.7. *$\mathcal{C}(2n+1, 2k)$ est rigide si $k \neq 1$.*

Les seules algèbres de Clifford-Weyl qui peuvent être déformées non trivialement sont alors $\mathcal{C}(2n+1, 2)$. Pour ce faire, on définit :

Définition 3.3.2 Soit $\mathcal{A}_\Lambda(n)$ (Λ paramètre formel) l'algèbre engendrée par $\omega_1, \ldots, \omega_{2n+1}, E_\pm$ qui satisfont les relations :

$$\begin{aligned}
&[E_+, E_-]_- := E_+E_- - E_-E_+ = -\frac{1}{4} + i^n \Lambda \omega_1 \ldots \omega_{2n+1},\\
&\omega_j\omega_k + \omega_k\omega_j = 2\delta_{jk} \quad (1 \leq j, k \leq 2n+1)\\
&E_\pm\omega_j = -\omega_j E_\pm \quad (1 \leq j \leq 2n+1)
\end{aligned}$$

Alors :

Théorème 3.3.8. *$\mathcal{A}_\Lambda(n)$ est une déformation polynomial non triviale de $\mathcal{C}(2n+1, 2)$. De plus, $\mathcal{A}_\Lambda(n)$ est aussi une formule de déformation universelle de $\mathcal{C}(2n+1, 2)$ (voir 5.3, p. 40) .*

Nous avons également étudié quelques propriétés de ces algèbres $\mathcal{A}_\Lambda(n)$. Pour en citer quelques unes : le centre de $\mathcal{A}_\Lambda(n)$ est $\mathbb{C}[\Lambda]$ et $\mathcal{A}_\Lambda(n)$ est une algèbre noethérienne. Nous démontrons dans [**MPU09**] un lemme de périodicité pour $\mathcal{A}_\Lambda(n)$, similaire à celui pour

$\mathcal{C}(n, 2k)$. Les représentations de $\mathcal{A}_\Lambda(n)$ ont été complètement décrites dans ce travail, à l'aide de l'algèbre enveloppante de la super-algèbre de lie $\mathfrak{osp}(1, 2)$ et du fantôme, ainsi que par ses quotients primitifs.

Chapitre

4 Conclusions et perspectives

Quelques directions vers lesquelles j'aimerais poursuivre mes recherches dans un futur proche sont décrites brièvement dans ce chapitre. Deux de ces directions font référence à des travaux mentionnés précédemment dans ce manuscrit. La troisième est une nouvelle perspective motivée par des raisons personnelles.

4.1 Dans la suite de mes travaux précédents

Dans le chapitre 2 (section 2.4, p. 13), j'ai décrit un travail en commun avec Georges Pinczon et notre doctorant Minh Thanh Duong où nous définissons un nouvel invariant des algèbres de Lie quadratiques et des classifications conséquentes. Nous étudions actuellement une notion similaire pour d'autres algèbres munies d'une forme quadratique, notamment pour les super-algèbres de Lie quadratiques. Dans ce cas, un invariant pourrait être défini de façon analogue et une classification semblable à celle pour les algèbres de Lie quadratiques élémentaires et singulières pourrait en être déduite.

Un certain nombre de suites à **[PU05]** sont envisageables, que je vais détailler dans la suite de cette section. L'apparition assez remarquable de certaines formules de resommation de séries divergentes lors du calcul de quelques super-traces renormalisées ouvre des pistes intéressantes.

Comme l'on a vu, certains opérateurs T ont une super-trace naïve, notée ici Str, comme par exemple les opérateurs de rang fini. Nous avons vérifie dans ce cas que $\mathrm{Str}(T) = \mathrm{RStr}(T)$, ce qui permet de considérer RStr comme une renormalisation naturelle de la super-trace naïve. Que peut-on dire en général ? C'est là qu'intervient Euler : on vérifie facilement avec la formule du $\star$-produit de Moyal, que

$$\mathrm{RStr}(T) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k\leq n} C_n^k \, (-1)^k t_k,$$

où t_k sont les coefficients diagonaux de T. N'étant pas des experts en resommation, Georges Pinczon et moi-même avons été éclairés par la première page du livre de Hardy :

$$\mathrm{RStr}(T) \text{ est la resommée d'Euler de la super-trace naïve } \sum_n (-1)^n t_n.$$

Donc si $\mathrm{Str}(T)$ converge, alors $\mathrm{RStr}(T)$ converge. Les opérateurs de rang fini sont un cas particulier (intéressant car la série $\mathrm{Str}(T)$ est finie, alors que la série $\mathrm{RStr}(T)$ est infinie). Voilà comment la formule de resommation d'Euler apparaît naturellement dans le contexte de la quantification de l'oscillateur harmonique et fournit un procédé de renormalisation de la super-trace naïve des opérateurs.

Ce qui est troublant, c'est que la méthode suivie marche en général avec $\mathbb{C}[p_1, q_1, ..., p_n, q_n]$ et les opérateurs de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. On peut toujours donner une formule de renormalisation de la super-trace naïve des opérateurs (à condition de choisir ce que veut dire sommer la famille qui apparaît). Mais là, il n'y a pas à ma connaissance de procédé de resommation d'Euler. Il me semble qu'il est à inventer et nous n'y sommes pas parvenus jusqu'à présent. Nous savons que pour les opérateurs de rang fini, la super-trace renormalisée $\mathrm{RStr}(T)$ converge vers $\mathrm{Str}(T)$ (3.2.1, p. 25), mais nous ne savons pas si le fait que $\mathrm{Str}(T)$ converge implique que $\mathrm{RStr}(T)$ converge en général, i.e. s'il existe vraiment un procédé de resommation pour des familles.

4.2 Vers de nouvelles perspectives

En septembre 2010, j'ai rejoint l'INRIA Lille - Nord Europe dans le cadre d'une délégation. Le projet de recherche associé à cette délégation s'insère dans un cadre un peu différent de ce que j'ai pu faire auparavant. On y retrouve les algèbres de Lie, mais on y trouve également les réseaux de Petri stochastiques. Ce projet rentre plus précisément dans le cadre de la modélisation stochastique des systèmes dynamiques, un sujet aux nombreuses applications (e.g. réseaux de files d'attente, sûreté de fonctionnement, réseaux de régulation de gènes, modèles financiers).

Je m'intéresse en particulier dans ce projet aux réseaux de Petri stochastiques interprétés comme des systèmes de réactions chimiques. Pour un tel système, le but est de calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire indiquant le nombre de molécules présentes à tout instant. Un réseau de Petri stochastique est une chaîne de Markov ayant un nombre dénombrable d'états. Les simulations de type Monte-Carlo pour traiter ce genre de questions sont souvent imprécises ou coûteuses en temps. A partir de l'équation maîtresse de la chaîne de Markov, on peut cependant obtenir une équation différentielle de type Schrödinger en appliquant des techniques utilisées en physique mathématique. L'étude de l'hamiltonien correspondant à cette équation différentielle est déterminante pour sa résolution. Si la théorie est bien maîtrisée dans le cas de l'ordre 1, le phénomène de "cascade infinie" apparaissant dès l'ordre 2 rend le problème très difficile.

L'hamiltonien correspondant à l'équation différentielle de type Schrödinger engendre une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le premier objectif du projet est d'utiliser mes connaissances sur la théorie des algèbres de Lie pour exploiter l'utilisation possible des propriétés structurelles de $\mathfrak{g}$ afin, entre autres, de faciliter la résolution de ces équations. Un autre objectif est d'écrire en collaboration avec des équipes lilloises un logiciel compatible avec le standard SBML (Systems Biology Markup Language) afin de pouvoir tester les résultats théoriques obtenus sur des modèles biologiques existants.

Chapitre

5 Annexes

Ces annexes contiennent différents résultats assez connus et définitions qu'il m'a semblé utile de mentionner afin de faciliter la lecture du manuscrit.

5.1 Glossaire sur l'algèbre de Weyl et l'algèbre de Clifford

On désigne par $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{L}}$ le crochet défini sur une algèbre associative A par :

$$[a,b]_{\mathcal{L}} := ab - ba,\ \forall\ a,b \in A.$$

Définition 5.1.1 L'*algèbre de Weyl* à $2k$ générateurs est définie comme la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ soumis aux relations

$$[p_i, q_j]_{\mathcal{L}} = \delta_{ij},\ [p_i, p_j]_{\mathcal{L}} = [q_i, q_j]_{\mathcal{L}} = 0,\ \text{pour tous } 1 \le i, j \le k.$$

Proposition 5.1.1. *L'algèbre de Weyl* W_{2k} *est centrale et simple.*

Propriétés 5.1.2. *(algèbres de Weyl & super-symétrie)*

1. W_{2k} *est* $\mathbb{Z}_2$*-gradué comme algèbre et* $\mathbb{Z}$*-gradué comme espace vectoriel,* $\mathsf{W} = \mathsf{W}_{2k} = \oplus_{r\ge 0}\mathsf{W}^r$.
   Soit $\mathfrak{h} = \mathsf{W}^1 \oplus \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ *avec* $\mathsf{W}^1 = \operatorname{span}\{p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k\}$. *Alors*
   $$\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{osp}(1, 2k)$$
2. W *est semi-simple sous l'action adjoint de* $\mathfrak{h}_{\bar{0}} \simeq \mathfrak{sp}(2k)$ *et* $\mathsf{W} = \oplus_{r\ge 0}\mathsf{W}^r$ *est sa décomposition en composantes isotypiques.*

3. W *est semi-simple sous l'action adjointe de* $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{osp}(1,2k)$ *et* $\mathsf{W} = \mathbb{C} \oplus_{r\geq 1} \left(\mathsf{W}^{2r-1} \oplus \mathsf{W}^{2r}\right)$ *est sa décomposition en composantes isotypiques.*
4. W_{2k} *est rigide. Plus précisément, on a* $H^r(\mathsf{W}_{2k}) = \{0\}$ *pour tout* $r > 0$.

Définition 5.1.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\bigwedge_n$ l'algèbre de Grassmann en n variables anticommutatives $\omega_1, \ldots, \omega_n$. On rappelle que $\bigwedge_n$ est $\mathbb{Z}$-graduée. On désigne par $\partial_1, \ldots, \partial_n$ les super-dérivations définies par $\partial_i(\omega_j) = \delta_{ij}$, $\forall\ i, j$. L'algèbre $\bigwedge_n$ est munie d'un super-crochet de Poisson :

$$\{\Omega, \Omega'\} = 2(-1)^{\deg_{\mathbb{Z}}(\Omega)+1} \sum_i \partial_i(\Omega) \wedge \partial_i(\Omega'),$$

pour tous $\Omega, \Omega' \in \bigwedge_n$ ([**PU07**]). On définit l'opérateur $\wp$ de $\bigwedge_n \otimes \bigwedge_n$ par :

$$\wp := \sum_i \partial_i \otimes \partial_i,$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel des opérateurs.

On dénote le produit de $\bigwedge_n$ par $m_\wedge$ et on considère t comme un paramètre formel (ou $t \in \mathbb{C}$). Un nouveau produit $m_{\underset{t}{\star}}$ peut être défini par (voir [**PU07**]) :

$$m_{\underset{t}{\star}} := m_\wedge \circ \exp(-t\wp) \tag{5.1}$$

L'*algèbre de Clifford* $\mathcal{C}(n)$ à n générateurs est définie comme le espace vectoriel $\bigwedge_n$ munie du produit $\star := m_{\underset{1}{\star}} = m_\wedge \circ \exp(-\wp)$.

Proposition 5.1.2.

1. *L'algèbre de Clifford* $\mathcal{C}(2n)$ *est isomorphe à l'algèbre de matrices* $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$*. De plus* $\mathcal{C}(2n)$ *est simple et son centre est* $\mathbb{C}$*. L'algèbre de Clifford* $\mathcal{C}(2n+1)$ *est isomorphe à* $\mathcal{C}(2n) \times \mathcal{C}(2n)$.
2. $\mathcal{C}(n)$ *est une algèbre de Lie avec le crochet défini par*
$$[\Omega, \Omega']_{\mathcal{L}} = \Omega \star \Omega' - \Omega' \star \Omega, \text{ pour tous } \Omega, \Omega' \in \mathcal{C}(n)$$
3. *Il existe une trace naturelle définie sur* $\mathcal{C}(2n)$ *:*
$$\mathrm{Tr}(\Omega) := 2^n\ \Omega(0),\ \forall \Omega \in \mathcal{C}(2n)$$
4. *Tout opérateur différentiel* T *peut être écrit comme*
$$T = \sum_{I \in \{0,1\}^n} (-1)^{\theta(I,I)} \left(m_\wedge \circ (T \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta(x^I)\right) \wedge \partial^I,$$

où θ est la forme bilinéaire sur $\mathbb{N}^n$ de matrice $(\theta_{rs})_{r,s=1}^n$ avec $\theta_{rs} = 1$ si $r > s$ et 0 sinon, $\mathcal{S}$ est l'antipode de Φ_n et Δ est son coproduit.

Propriétés 5.1.4. *(Algèbres de Clifford & symétrie)*

1. *$\mathcal{C} = \mathcal{C}(n)$ est $\mathbb{Z}$-gradué comme espace vectoriel.*
2. *Soit $\mathfrak{g} = \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^2$. Alors*
$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{o}(n+1).$$
3. *$\mathcal{C}$ est semi-simple sous l'action adjointe de $\mathcal{C}^1 \simeq \mathfrak{o}(n)$ et $\mathcal{C} \simeq \bigwedge \mathbb{C}^n$.*
4. *$\mathcal{C}(n)$ est rigide. Plus précisément, on a $H^r(\mathcal{C}(n)) = \{0\}$ pour tout $r > 0$.*

Si l'on considère le $\star$ -produit sur W défini dans la section 3.2 (p. 20) et celui défini sur l'algèbre de Clifford-Weyl (voir 3.3, p. 26), nous pouvons résumer dans un tableau les présentations des algèbres de Weyl, Clifford et Clifford-Weyl :

algèbre	générateurs	relations
W_{2k}	$\{p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k\}$	$[u,v]_- = \{u,v\}\ .\ 1,\ \ \forall\ u,v \in \mathrm{Vect}\{p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k\}$
$\mathcal{C}(n)$	$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$	$[v,v']_+ = \{v,v'\}\ .\ 1,\ \forall\ v,v' \in \mathrm{Vect}\{\omega_1,, \ldots, \omega_n\}$
$\mathcal{C}(n,2k)$	$\{\omega_1, \ldots, \omega_n, p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k\}$	$[\omega_i, \omega_j]_+ = 2\delta_{ij}$, $[p_i, q_j]_- = \delta_{ij}, [p_i, p_j]_- = [q_i, q_j]_- = 0$, $[\omega_i, p_j]_+ = 0, [\omega_i, q_j]_+ = 0, \forall\ i,j$

où $[A,B]_\pm := A \star B \pm B \star A$.

5.2 Glossaire sur le complexe de Koszul

Dans ce qui se suit, on rappelle quelques notions de la théorie cohomologique en association avec la théorie de déformations de Gerstenhaber [Ger64].

Soit A une algèbre associative. Pour $k > 0$, on dit qu'une application k-linéaire de A^k sur A est une *k-cochaîne*. Les 0-cochaînes sont les éléments de A. On désigne l'espace des cochaînes par $M(A) = \oplus_{k \geq 0} M^k(A)$ où $M^k(A)$ est l'espace de k-cochaînes. L'*opérateur de cobord de Hochschild d* agit sur $M(A)$ par :
- si $a \in A = M^0(A)$, $da = -\operatorname{ad}(a)$ où $\operatorname{ad}(a)(b) := [a,b]_{\mathcal{L}}$, pour tous a,$b \in A$.

- si $\Omega \in M^k(A)$, $k > 0$:

$$d\Omega(a_1,\dots,a_{k+1}) = a_1\Omega(a_2,\dots,a_{k+1}) - \Omega(a_1a_2,a_3,\dots,a_{k+1}) + \Omega(a_1,a_2a_3,\dots,a_{k+1}) + \cdots + (-1)^{k+1}\Omega(a_1,\dots,a_k)a_{k+1}$$

On a $d^2 = 0$. On pose $B^0(A) = \{0\}$, $B^k(A) = dM^{k-1}(A)$, $k > 0$, $Z^k(A) = \ker\left(d|_{M^k(A)}\right)$, $k \geq 0$ et $H^k(A) = Z^k(A)/B^k(A)$. Les éléments de $B^k(A)$ sont les *k-cobords* et ceux de $Z^k(A)$, les *k-cocycles*. On appelle $H^k(A)$ le $k^{\text{ème}}$-espace de cohomologie de Hochschild de A. On remarque que $H^0(A)$ est le centre de A.

Une *déformation* de A avec un paramètre formel Λ est la donnée d'une structure de $\mathbb{C}[[\Lambda]]$-algèbre sur $A[[\Lambda]]$ définie par :

$$a \star b = ab + \sum_{n\geq 1} \Lambda^n\Omega_n(a,b),\ \forall a,b \in A, \Omega_n \in M^2(A), \forall n.$$

L'associativité de $\star$ peut être vue en termes de cohomologie de Hochschild : $\Omega_1 \in Z^2(A)$ et lorsque $\Omega_1 \in B^2(A)$, on peut l'enlever avec une équivalence, i.e. un isomorphisme de $\mathbb{C}[[\Lambda]]$-algèbres. Lorsque $H^2(A) = \{0\}$, en utilisant le même argument, on peut conclure que toute déformation est équivalente au produit initial, donc A est rigide. Les conditions imposées sur Ω_n, $n \geq 2$ peuvent être écrites en termes de la 3-cohomologie, ce qui implique que si $H^3(A) = \{0\}$, alors pour tout $\Omega_1 \in Z^2(A)$, il existe une déformation avec cocycle dominant Ω_1. Ces deux résultats sont connus comme les théorèmes de rigidité et intégrabilité.

5.3 Formule de déformation universelle

On considère une algèbre associative A et son produit m_0. On désigne par $\mathsf{M}(A) = \sum_{k\geq 0} \mathsf{M}^k(A)$ l'espace des applications multilinéaires sur A. Cet espace est gradué : $\mathsf{M}^{(k)} := \mathsf{M}^{k+1}(A)$ et muni du crochet de Gerstenhaber, c'est une algèbre de Lie graduée **[PU07]**. Soit $d = -\operatorname{ad}(m_0)$. Comme $d^2 = 0$, d définit un complexe sur $\mathsf{M}(A)$, le *complexe de cohomologie de Hochschild* de A (voir [GS88]). Soit $\mathsf{Z}^2(A)$ l'ensemble des 2-cocycles, $B^2(A)$ celui des 2-cobords et $H^2(A)$ qui satisfait $\mathsf{Z}^2(A) = B^2(A) \oplus H^2(A)$.

Étant donnés deux espaces vectoriels V et W, une *application formelle* $F : V \to W$ est une série formelle $F = \sum_{k\geq 0} F_k$ où F_k est une fonction polynomiale de degré k de V sur W. Considérons des applications formelles $F : H^2(A) \to \mathsf{M}(A)$ et définissons un crochet d'algèbre de Lie graduée basée sur celui défini sur $\mathsf{M}(A)$:

$$[F,F'] = \sum_{k\geq 0}\sum_{r+s=k}[F_r,F'_s] \text{ for } F = \sum_{k\geq 0} F_k, F' = \sum_{k\geq 0} F'_k$$

avec $[F_r,F'_s](h) = [F_r(h),F'_s(h)]$, $\forall h \in H^2(A)$.

Definition 5.3.1 Une *formule de déformation universelle* de A est une application formelle $F : \mathsf{Z}^2(A) \to \mathsf{M}^2(A)$ qui satisfait :

1. $F = m_0 + \mathrm{Id}_{H^2(A)} + \sum_{k\geq 2} F_k$,
2. $[F, F] = 0$.

Si F est une formule de déformation universelle, λ un paramètre formel et $h \in H^2(A)$, alors $m_h^\lambda := F(\lambda h) = m_0 + \lambda h + \sum_{k\geq 2} \lambda^k F_k$ est une déformation de m_0. Plus généralement, si l'on a une courbe formelle dans $H^2(A)[[\lambda]]$, $\widetilde{h} = \sum_{n\geq 1} \lambda^n h_n$, alors

$$m_{\widetilde{h}}^\lambda := F(\widetilde{h}(\lambda)) = m_0 + \lambda h_1 + \sum_{k\geq 2} \lambda^k \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=k \\ i_1,\ldots,i_n\geq 1, 1\leq n\leq k}} F_n(h_{i_1}, \ldots, h_{i_n})$$

est une déformation de m_0.

Lemma 5.3.2. *Soit $\mathsf{D}^2(A)$ un sous-espace complémentaire de $\mathsf{Z}^2(A)$ dans $\mathsf{M}^2(A)$. Si $H^3(A) = \{0\}$, alors il existe une formule de déformation universelle*

$$F = m_0 + \mathrm{Id}_{H^2(A)} + \sum_{k\geq 2} F_k, \quad \textit{où} \quad F_k \in \mathsf{D}^2(A), \forall k \geq 2.$$

Lemma 5.3.3.

1. *Soit m^λ une déformation de m_0. Alors, à équivalence près, m^λ peut-être écrit comme :*

$$m^\lambda = m_0 + h(\lambda) + d(\lambda), \quad \textit{où } h(\lambda) \in \lambda H^2[[\lambda]], \ d \in \lambda^2 \mathsf{D}^2[[\lambda]].$$

2. *Si m'^λ est une autre déformation avec*

$$m'^\lambda = m_0 + h(\lambda) + d'(\lambda), \quad \textit{où} \quad d'(\lambda) \in \lambda^2 \mathsf{D}^2[[\lambda]],$$

alors $d'(\lambda) = d(\lambda)$.

Proposition 5.3.4. *Supposons $H^3(A) = \{0\}$. Soit F une formule de déformation universelle et m^λ une déformation. À équivalence près, il existe une courbe formelle $h(\lambda)$ dans $H^2(A)[[\lambda]]$ telle que $h(0) = 0$ et $m^\lambda = F(h(\lambda))$. Cela veut dire que F caractérise toutes les déformations de m_0 à équivalence et à paramètre formel près.*

Chapitre

6 Activités d'encadrement

Depuis mon recrutement comme Maître de Conférences à Dijon, j'ai exercé différentes activités d'encadrement.

J'ai été responsable de l'UE Informatique Scientifique de 2003 à 2009 et dans ce cadre, j'ai encadré plusieurs projets de fin d'année. Il s'agissait de projets sur machine dont le but était de résoudre des problèmes mathématiques à l'aide du logiciel Maple.

Au niveau Master première année, j'ai encadré dix mémoires depuis 2001, ce qui correspond à seize étudiants (le mémoire est fait par binôme depuis quelques années). De 2004 à 2009, j'ai été en outre responsable de cette UE Mémoires. Les sujets que j'ai proposés traitaient le plus souvent de la théorie des algèbres de Lie (sujet prisé par les étudiants en le voyaient comme un bon entraînement en algèbre linéaire), de la théorie des représentations des groupes finis et de la théorie de Galois (absente de nos maquettes en L3 et M1).

J'ai coencadré avec Georges Pinczon deux mémoires de DEA, l'un en 2001 et l'autre en 2004. Ce dernier portait sur la théorie de base des super-algèbres de Lie et les comparait avec les algèbres de Lie. Un projet de thèse a été proposé à l'étudiant, qui n'a finalement pas abouti.

Pierre-Alexandre Gié avait suivi le cours d'algèbre de Maîtrise de Georges et choisi de poursuivre ses études dans cette direction. Après son mémoire de DEA soutenu en 2001, Georges et moi avons coencadré sa thèse financée par une allocation de recherche du ministère et un monitorat. Il me fut très agréable d'avoir un étudiant comme lui, très intéressé, intelligent et perfectionniste comme en témoigne sa thèse qui est très bien rédigée. À la suite de ses trois années de thèse, Pierre-Alexandre a préféré prendre les fonctions de professeur agrégé au Lycée Corot, à Savigny-sur-Orge. Il exerce depuis septembre 2010 les mêmes fonctions en CPGE à Saint-Cloud.

Georges et moi avons été contactés en 2008 par un étudiant vietnamien, Minh Thanh Duong, bénéficiaire d'une bourse de thèse de l'ambassade de France au Vietnam et qui souhaitait effectuer son doctorat à Dijon. Au vu de ses bonnes recommandations, nous avons accepté d'encadrer ses travaux. Les modalités de sa bourse font que Thanh ne réside pas tout le temps en France : il lui est accordé trois séjours en trois ans, d'un total de 15 mois. Cela nécessite une grande autonomie dont il a su faire preuve, comme en atteste la qualité de son travail. Thanh rédige actuellement sa thèse, la soutenance étant prévue en juillet 2011.

Bibliographie

Note : les publications référencées en caractères gras sont celles dont je suis coauteur.

[AFLS00] Jacques Alev, Marco Farinati, Thierry Lambre, and Andrea Solotar. Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini. *Journal of Algebra*, 232(2) :567–577, 2000.

[AL50] Shimshon A. Amitsur and Jakov Levitzki. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 :449–463, 1950.

[BD04] Karin Baur and Jan Draisma. Higher secant varieties of the minimal adjoint orbit. *Journal of Algebra*, 280(2) :743–761, October 2004.

[Che89] Vladimir Chernousov. On the Hasse principle for groups of type E_8. *Translation in Soviet Math. Dokl.*, 39 :592–596, 1989.

[CI06] Arjeh M. Cohen and Gábor Ivanyos. Root filtration spaces from Lie algebras and abstract root groups. *Journal of Algebra*, 300(2) :433–454, June 2006.

[**CSUW01**] Arjeh M. Cohen, Anja Steinbach, Rosane Ushirobira, and David Wales. Lie algebras generated by extremal elements. *Journal of Algebra*, 236 :122–154, February 2001.

[Dad85] Jiri Dadok. Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups. *American Journal of Mathematics*, 228(1) :125–137, March 1985.

[Dix74] Jacques Dixmier. *Algèbres enveloppantes*. Cahiers Scientifiques, Fascicule XXXVII. Gauthier-Villars, 1974.

[Dix79] Jacques Dixmier. Champs de vecteurs adjoints sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 309 :183–190, 1979.

[**DPU10**] Minh Thanh Duong, Georges Pinczon, and Rosane Ushirobira. A new invariant of quadratic Lie algebras. Internal report, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon, France, July 2010. 41 pages.

[Ger64] Murray Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.*, 79 :59–103, 1964.

[Gié04] Pierre-Alexandre Gié. *Nouvelles structures de Nambu et super-théorème d'Amitsur-Levitzki*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, Dijon, France, novembre 2004. 170 pages.

[**GPU03**] Pierre-Alexandre Gié, Georges Pinczon, and Rosane Ushirobira. Back to the Amitsur-Levitzki theorem : a super version for the orthosymplectic Lie superalgebra osp(1,2n). *Letters in Mathematical Physics*, 66(1-2) :141–155, October 2003.

[**GPU06**] Pierre-Alexandre Gié, Georges Pinczon, and Rosane Ushirobira. The Amitsur-Levitzki theorem for the orthosymplectic Lie superalgebra osp(1,2n). *Journal of algebra and its applications*, 5(3) :307–332, June 2006.

[GS88] Murray Gerstenhaber and Samuel D. Shack. *Algebraic cohomology and deformation theory*. Deformation theory of algebras and structures and applications, Eds. M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber. Kluwer Publishers, 1988.

[itpPR09] Jos in 't panhuis, Erik Postma, and Dan Roozemond. Extremal presentations for classical Lie algebras. *Journal of Algebra*, 322(2) :295–326, July 2009.

[Kac85] Victor G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambrigde University Press, 1985.

[Kos58] Bertram Kostant. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 7 :237–264, 1958.

[Kos81] Bertram Kostant. A Lie algebra generalization of the Amitsur-Levitski theorem. *Advances in Mathematics*, 40(2) :155–175, 1981.

[KR71] Bertram Kostant and Stephen Rallis. Orbits and representations associated with symmetric spaces. *American Journal of Mathematics*, 93(3) :753–809, July 1971.

[**LU99**] Thierry Levasseur and Rosane Ushirobira. Adjoint vector fields on the tangent space of semisimple symmetric spaces. *Journal of Lie theory*, 9(2) :293–304, 1999.

[**MPU09**] Ian M. Musson, Georges Pinczon, and Rosane Ushirobira. Hochschild cohomology and deformations of Clifford-Weyl algebras. *Special Issue on Deformation Quantization in Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications (SIGMA)*, 5, 2009. Paper 028, 27 pages.

[Mus97] Ian M. Musson. On the center of the enveloping algebra of a classical simple Lie superalgebras. *Journal of Algebra*, 193 :75–101, 1997.

[Mus99] Ian M. Musson. Some Lie superalgebras associated to the Weyl algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 10 :2821–2827, 1999.

[Pan04] Dmitri Panyushev. On the Irreducibility of Commuting Varieties Associated with Involutions of Simple Lie Algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, 8(1) :38–44, 2004.

[Pin97] Georges Pinczon. On the equivalence between continuous and differential deformation theories. *Lett. Math. Phys.*, 39(2) :143–156, 1997.

[Pin07] Georges Pinczon. On Two Theorems about Symplectic Reflection Algebras. *Lett. Math. Phys.*, 82(2-3) :237–253, 2007.

[PS97] Alexander Premet and Helmut Strade. Simple Lie algebras of small characteristic : I. Sandwich elements. *Journal of Algebra*, 189(2) :419–480, March 1997.

[**PU05**] Georges Pinczon and Rosane Ushirobira. Supertrace and superquadratic Lie structure on the Weyl algebra and applications to formal inverse Weyl transform. *Letters in Mathematical Physics*, 74(3) :263–291, December 2005.

[**PU07**] Georges Pinczon and Rosane Ushirobira. New applications of graded Lie algebras to Lie algebras, generalized Lie algebras and cohomology. *Journal of Lie theory*, 17(3) :633–668, 2007.

[PY07] Dmitri Panyushev and Oksana Yakimova. Symmetric pairs and associated commuting varieties. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 143(2) :307–321, 2007.

[Roo05] Dan Roozemond. Lie algebras generated by extremal elements. Master thesis, Technische Universiteit Eindhoven, august 2005. 89 pages.

[Sch95] Gerald W. Schwarz. Lifting differential operators from orbit spaces. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 28-4(3) :253–305, 1995.

[Sze39] Gábor Szegö. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications, New York, 1939.

[**Ush96**] Rosane Ushirobira. *Sur la méthode des orbites pour les algèbres de Lie des champs de vecteurs sur une courbe*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, juin 1996. 67 pages.

[ZK91] Efim I. Zelmanov and Alexei I. Kostrikin. A theorem on sandwich algebras. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 4 :121–126, 1991.